# Indukcja i Zasada Szufladkowa

*Jeśli $n$ obiektów jest rozmieszczonych w $m$ szufladach i $n > m$, to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.*

*Jeśli $n$ obiektów jest rozmieszczonych w $m$ szufladach i $n > m \cdot r$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$, to istnieje szuflada z przynajmniej $r + 1$ obiektami.*

*Dla dowolnych dwóch skończonych zbiorów $A$ i $B$ istnieje bijekcja z $A$ do $B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| = |B|$.*

## Przykłady

**Przykład.** Czekolada składa się z $m \cdot n$ kostek ułożonych tradycyjnie w prostokąt o tych wymiarach. Proces łamania czekolady polega na wybraniu jednego z dostępnych kawałków i przełamania go wzdłuż jednej z linii (pionowej lub poziomej) oddzielającej kostki. Wyznacz minimalną liczbę łamań i odpowiadającą jej strategię łamania czekolady aż do otrzymania $m \cdot n$ pojedynczych kostek.

**Przykład** (Paradoks koni)**.** Udowodnimy, że wszystkie konie są tej samej maści. Posłużymy się indukcją matematyczną względem liczby koni w rozważanym zbiorze. Sprawdzamy bazę: każdy zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni jednej maści. Teraz załóżmy, że teza jest prawdziwa dla ustalonego $n$. Pokażemy, że zachodzi również dla $n+1$. Dodajmy do dowolnego $n$-elementowego zbioru nowego konia. Mamy zbiór $n + 1$ elementowy. Odprowadźmy teraz któregoś z konii ze zbioru ale nie tego co przed chwilą dodaliśmy. Otrzymujemy więc zbiór $n$-elementowy koni. Z założenia indukcyjnego wiemy, że wszystkie konie w tym zbiorze są jednej maści. Możemy teraz z powrotem przyprowadzić konia (który też jest tej samej maści bo był już wcześniej w tym zbiorze) i otrzymujemy $n + 1$-elementowy zbiór koni jednej maści.

Gdzie jest błąd?

**Przykład.** Dla dowolnych $n + 1$ różnych liczb wybranych spośród $1, 2, \ldots, 2n$ zawsze znajdziemy dwie względnie pierwsze ze sobą.

**Przykład.** Z kwadratowej szachownicy o rozmiarze $n \times n$ usuń dwa narożniki leżące po przeciwnych stronach jednej z przekątnych. Czy tę zmniejszoną planszę można pokryć (podzielić) kostkami domina o rozmiarze $2 \times 1$?

## Zadania

**Zadanie 1.** Na płaszczyźnie poprowadzono $n$ prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę

(i) obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;
(ii) obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.

**Zadanie 2.** Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zadany jest przez: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Udowodnij, że

(i) $F_0 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$,
(ii) $5 | F_{5n}$,
(iii) $F_n < 2^n$.

**Zadanie 3.** *Turniej* $n$-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i w którym $(u, v) \in E$ lub $(v, u) \in E$ dla dowolnych $u, v \in V$.

Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.

**Zadanie 4.** Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.

**Zadanie 5** (nierówność o ciągach jednomonotonicznych)**.** Dla tablicy kwadratowej $A = [(a_{i,j})]$ rozmiaru $n \times n$ definiujemy:

$$\mathrm{val}(A) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Niech $A = [(a_{i,j})]$ będzie macierzą o współczynnikach dodatnich, spełniającą dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant n$ warunek $a_{i,j_1} \leqslant a_{i,j_2}$. Wykaż, że:

$$\mathrm{val}(A) \geqslant \mathrm{val}[(a_{i,\pi_i(j)})],$$

gdzie $\pi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, jest dowolną permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

**Zadanie 6.** W każdym polu szachownicy rozmiaru $n \times n$ znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:

* osoby zarażone pozostają zarażone,
* osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony).

Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż $n$ osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.

**Zadanie 7.** Wykaż, że w grupie $n$ osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.

**Zadanie 8.** Przy okrągłym stole jest $n$ miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.

**Zadanie 9.** Udowodnij, że dla dowolnych $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $1, 2, \ldots, 2n$ zawsze znajdziemy dwie, z których jedna dzieli drugą.

**Zadanie 10.** Pokaż, że w dowolnym ciągu $n$ liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością $n$.

**Zadanie 11.** Wykaż, że jeśli $n$ jest nieparzysta i $\pi$ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$, to liczba $\prod_{i=1}^{n}(i - \pi(i))$ jest zawsze parzysta.

**Zadanie 12.** Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru $n$-elemetowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.

**Zadanie 13.** Dla $n$-elementowego zbioru $X$ rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.

**Zadanie 14.** Dana jest kwadratowa szachownica $n \times n$. Dla jakich wartosci $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości $2 \times 2$ oraz $3 \times 3$.

**Zadanie 15.** Dana jest kwadratowa szachownica $2^n \times 2^n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryc tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat $2 \times 2$ bez jednego pola).

**Zadanie 16.** Rozważ turniej rozgrywany przez $n$ drużyn w którym docelowo każda druzyna gra z każdą inną dokładnie raz. Wykaż, że w każdym momencie istnieją dwie drużyny z taką samą liczbą dotychczas rozegranych gier (niezależnie od grafiku rozgrywek).

**Zadanie 17.**

(i) Czy każde 2-kolorowanie prostej rzeczywistej spełnia własność, że dla dowolnego $r > 0$ istnieją dwa monochromatyczne punkty odległe dokładnie o $r$?
(ii) Czy każde 2-kolorowanie płaszczyzny spełnia własność, że dla dowolnego $r > 0$ istnieją dwa mochromatyczne punkty odległe dokładnie o $r$?
(iii) Czy każde 3-kolorowanie płaszczyzny spełnia własność, że dla dowolnego $r > 0$ istnieją dwa mochromatyczne punkty odległe dokładnie o $r$?
(iv) Pokoloruj płaszczyznę używając skończonej liczby kolorów w taki sposób, aby istniało $r > 0$ takie, że dowolne dwa punkty odległe o $r$ miały różne kolory.

**Zadanie 18.** Rozważ dowolne 2-kolorowanie płaszczyzny na niebiesko i czerwono. Pokaż, że zbiór odległości między niebieskimi punktami to całe $\mathbb{R}$ lub zbiór odległości między czerwonymi punktami to całe $\mathbb{R}$.