Zliczanie, liczby Stirlinga i liczby Catalana

$\left\{ {n \atop k} \right\}$, dla $n, k \in \mathbb{N}$, to liczba podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów (liczba Stirlinga drugiego rodzaju). Przyjmujemy, że $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

(i) $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$, dla $n > 0$,

(ii) $\left\{ {0 \atop k} \right\} = 0$, dla $k > 0$,

(iii) $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, dla $n > 0$,

(iv) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$, dla $n > 0$,

(v)
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}, \text{ dla } n, k > 0.$$

$\left[{n \atop k} \right]$, dla $n, k \in \mathbb{N}$ to liczba permutacji zbioru n-elementowego złożonych z k cykli (liczba Stirlinga pierwszego rodzaju). Przyjmujemy, że $\left[{0 \atop 0} \right] = 1$.

(i) $\left[{n \atop 0} \right] = 0$, dla $n > 0$,

(ii) $\left[{0 \atop k} \right] = 0$, dla $k > 0$,

(iii) $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$, dla $n > 0$,

(iv) $\left\{ {n \atop n} \right\} = \left[{n \atop n} \right] = 1$,

(v) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}$,

(vi)
$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right], \text{ dla } n, k > 0.$$

$\mathrm{B}(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$, to liczba relacji równoważności na zbiorze n-elementowym (liczby Bella).

Mamy oczywiście następujące tożsamości:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \qquad \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} = B(n), \qquad \sum_{i=0}^{n} \left[{n \atop i} \right] = n!.$$

Potęgi kroczące $x^{\underline{k}}$ oraz $x^{\overline{k}}$, dla $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$, zadane są przez

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1),$$
$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1).$$

Na wykładzie widzieliśmy, że dla $n \geqslant 0$ zachodzi

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}},$$
$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] x^k.$$

Zadania

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje $k \geqslant 1$ takie, że

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} < \cdots < \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} > \cdots > \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Wykaż, że:

$$\mathrm{B}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mathrm{B}(i), \text{ dla } n > 0.$$

Zadanie 3. Wykorzystując tożsamość $x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$ wykaż dla $n \geqslant 0$, że

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}},$$
$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla $m, n \geqslant 0$

$$\sum_k \left\{ n \atop k \right\} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = [m = n].$$

Zadanie 5. Wykaż, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left\{ n \atop k+1 \right\} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0 < i_0 < \ldots < i_{k-1} < n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} \cdots \binom{i_1}{i_0}.$$

Posługując się tą tożsamością wylicz postać zwartą $\left\{ n \atop 3 \right\}$.

Zadanie 6. Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne $\{a_{i,j}\}_{1 \leqslant i \leqslant j}$.

(i) $a_{0,0} = 1$,

(ii) $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, dla $n \geqslant 0$,

(iii) $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, dla $n \geqslant k \geqslant 0$.

Wykaż, że $\mathrm{B}(n) = a_{n,0}$.

Zadanie 7. Przedstaw $n-$tą liczbę Fibonacciego w postaci sumy co najwyżej n-elementowej sumy współczynników dwumianowych.

Zadanie 8. Wykaż, że liczba podziałów zbioru $(n-1)$-elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.

Zadanie 9. Rozważ graf na zbiorze $\mathbb{Z}^2$ w którym (a,b), (c,d) są połączone krawędzią jeśli $a = c$ i $b \in \{d-1, d+1\}$ lub $a \in \{c-1, c+1\}$ i $b = d$. Ścieżka jest dobra jeśli zaczyna się w wierzchołku $(0,0)$ i w każdym kroku idzie albo w prawo (przesunięcie o wektor $(1,0)$) albo do góry (przesunięcie o wektor $(0,1)$). Niech $\mathcal{X}_n$ będzie zbiorem par dobrych ścieżek długości n takich, że dwie ścieżki w parze zaczynają się w tym samym punkcie ($(0,0)$) i kończą się w tym samym punkcie ale nie mają żadnych innych punktów wspólnych. Wyznacz $|\mathcal{X}_n|$ dla $n \geqslant 0$.

Zadanie 10. Wykaż, że

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n,$$

gdzie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Zadanie 11. Posługując się interpretacją kombinatoryczną wykaż, że

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} n^{\underline{n-k}} = n! \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} / k!, \tag{2}$$

$$\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}, \tag{4}$$

Zadanie 12. Rozważ graf na zbiorze $\mathbb{Z}^2$ w którym (a,b), (c,d) są połączone krawędzią jeśli $a = c$ i $b \in \{d-1, d+1\}$ lub $a \in \{c-1, c+1\}$ i $b = d$. Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem nakrótszych ścieżek z punktu $(0,0)$ do punktu (n,n). Oczywiście wszystkie ścieżki w $\mathcal{P}$ mają długość $2n$, przy czym każda ma n kroków do góry (przesunięć o wektor $(0,1)$) oraz n kroków w prawo. *Nadwyżką* scieżki $P \in \mathcal{P}$ nazywamy liczbę kroków do góry znajdujących się ponad przekątną $y = x$ (jeden z końców kroku może leżeć na przekątnej). Zatem nadwyżka ścieżki P to wartość ze zbioru $\{0, \ldots, n\}$.

Wykaż, że dla dowolnych $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ liczba ścieżek o nadwyżce i równa jest liczbie ścieżek o nadwyżce j. Wyprowadź na podstawie tej obserwacji wzór na liczby Catalana.

Zadanie 13. Udowodnij, że liczba ukorzeniownych drzew binarnych na n wierzchołkach to n-ta liczba Catalana.

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno *lewe dziecko* i co najwyżej jedno *prawe dziecko*.

Zadanie 14. Ciąg podziałów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór $\{1, \ldots, n\}$. Podział $(i+1)$-wszy otrzymujemy z podziału i-tego poprzez:

(i) wybranie jednego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,
(ii) podzielenie każdego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego na dwa niepuste podzbiory.

W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?

Zadanie 15. Triangulacją n-wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór $(n-3)$ wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na $(n-2)$ trójkątów.

(i) Ile jest triangulacji n-wierzchołkowego wielokąta wypukłego?
(ii) Ile jest triangulacji n-wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?

Zadanie 16. Udowodnij, że dla $\ell, m, n \geqslant 0$

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}, \tag{5}$$

$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}, \tag{6}$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}, \tag{7}$$

$$\left[{n \atop m} \right] = \sum_k \left[{n+1 \atop k+1} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}, \tag{8}$$

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}, \tag{9}$$

$$\binom{n}{m} = \sum_k \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{m-k}, \tag{10}$$

$$n^{\underline{n-m}} [n \geqslant m] = \sum_k \left[{n+1 \atop m+1} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{m-k}, \tag{11}$$

$$\left\{ {n \atop n-m} \right\} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left[{m+k \atop k} \right], \tag{12}$$

$$\left[{n \atop n-m} \right] = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left\{ {m+k \atop k} \right\}, \tag{13}$$

$$\left\{ {n \atop \ell+m} \right\} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \left\{ {k \atop \ell} \right\} \left\{ {n-k \atop m} \right\} \binom{n}{k}, \tag{14}$$

$$\left[{n \atop \ell+m} \right] \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \left[{k \atop \ell} \right] \left[{n-k \atop m} \right] \binom{n}{k}, \tag{15}$$

$$\left[{n+1 \atop 2} \right] = n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right). \tag{16}$$