Posety i Zbiory

Twierdzenie (dualne do Dilwortha)**.** Dowolny skończony poset o wysokości h można podzielić na h antyłańcuchów.

Twierdzenie (Dilworth; 1950)**.** Dowolny skończony poset o szerowkości w można podzielić na w łańcuchów.

Lemat (Erdős, Szekeres; 1935)**.** Dowolny ciąg $m{\cdot}n{+}1$ liczb rzeczywistych zawiera podciąg niemalejący długości $m+1$ lub podciąg nierosnący długości $n+1$.

Twierdzenie (Sperner; 1928)**.** Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$, mamy $A \not\subset B$. Wtedy

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Twierdzenie (Erdős–Ko–Rado; 1961)**.** Niech $n \geqslant 2k$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną k-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$.

Zadania

Będziemy również rozwiązywać zadania nierozwiązane zeszłym razem z Zestawu 3.

Zadanie 1. Wykaż, że spośród dowolnych trzech permutacji zbioru $[n]$ istnieją dwie zawierające wspólny podciąg długości co najmniej $n^{1/3}$.

Zadanie 2. Niech I będzie rodziną n przedziałów na osi rzeczywistej. Wykaż, że I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów parami rozłącznych lub I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów takich, że wszystkie posiadają wspólny punkt.

Zadanie 3. Zbiór J przedziałów na $\mathbb{R}$ jest *zagnieżdżony*, jeśli dla dowolnych $A, B \in J$ mamy $A \subseteq B$. lub $A \supseteq B$.

Niech $n, k \geqslant 1$. Niech I będzie rodziną n przedziałów na $\mathbb{R}$. Wykaż, że

(i) istnieje $J \subseteq I$ taki, że $|J| = k$ i J zagnieżdzony, lub
(ii) istnieje $J' \subseteq I$ taki, że $|J'| \geqslant n/k$ i dla dowolnych $A \neq B \in J'$ mamy $A \not\subseteq B$.

Zadanie 4. Udowodnij, że rodziny $\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$ i $\binom{[n]}{\lceil n/2 \rceil}$ to jedyne antyłańcuchy w $\mathcal{B}_n = (\mathcal{P}(n), \subseteq)$ świadczące szerokość $\mathcal{B}_n$.

Zadanie 5. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $|a_i| \geqslant 1$ dla każdego $i \in [n]$. Niech

$$P(a_1, \ldots, a_n) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot a_i < 1\}.$$

Wykaż, że $|P(a_1, \ldots, a_n)| \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że nie istnieją $A, B, C \in \mathcal{F}$ dla których $A \subsetneq B \subsetneq C$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leqslant 2 \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ jest *przecinająca się*, jeśli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$.

Zadanie 7. Niech $\mathcal{F}$ będzie maksymalną przecinającą się rodziną podzbiorów $[n]$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| = 2^{n-1}.$$

Zadanie 8. Niech $\mathcal{F}$ będzie maksymalną rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cup B \neq [n]$. Wyznacz $|\mathcal{F}|$.

Zadanie 9. Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest *rozróżniająca* jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest *silnie rozróżniająca* jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takie, że $x \in F_1 - F_2$ i $y \in F_2 - F_1$.

(i) Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny rozróżniającej $[n]$?
(ii) Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny silnie rozróżniającej $[n]$?

Zadanie 10. Niech $1 \leqslant s < r < n$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów r-elementowych zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$ mamy $|A \cap B| \leqslant s$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leqslant \frac{\binom{n}{s+1}}{\binom{r}{s+1}}.$$