Twierdzenia Ramseyowe

Twierdzenie (Ramsey; 1930)**.** Dla dowolnych $n \geqslant p \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : \binom{[N]}{p} \to [k]$ istnieje $X \subseteq [N]$ oraz $\alpha \in [k]$ takie, że

$$|X| = n \quad \text{oraz} \quad \binom{X}{p} \subseteq c^{-1}(\alpha).$$

Twierdzenie (Erdős-Szekeres; 1935)**.** Dla każdego n istnieje N takie, że dla dowolnych N punktów na płaszczyźnie pewne n spośród nich tworzy wielokąt wypukły.

Twierdzenie (Schur; 1916)**.** Dla dowolnego $k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że

$$c(x) = c(y) = c(z) \quad \text{oraz} \quad x + y = z.$$

Twierdzenie (Van der Waerden; 1927)**.** Dla każdego $m, k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości m.

Zadania

Drzewo binarne to drzewo w którym stopień każdego wierzchołka jest $\leqslant 3$. *Ukorzenione drzewo binarne* to drzewo binarne, w którym wyróżniono jeden z wierzchołków, zwany *korzeniem* stopnia co najwyżej 2. Dodatkowo dla każdego wierzchołka rozróżniamy jego sąsiadów tak, że jedyny sąsiad na ścieżce do korzenia to *rodzic* (korzeń nie ma rodzica); pozostali sąsiedzi są opcjonalni i są to: *lewe dziecko* i *prawe dziecko*. Zauważ, że wierzchołki ukorzenionego drzewa binarnego są w oczywistej bijekcji ze zbiorem ciągów binarnych domkniętym na relację prefiksu (korzeń wtedy odpowiada ciągowi pustemu).

Kompletne drzewo binarne rzędu n, które oznaczamy T_n, to drzewo odpowiadające wszystkim ciągom binarnym długości co najwyżej n. Zatem T_0 to pojedynczy wierzchołek, a T_1 ma trzy wierzchołki.

Mówimy, że $x \leqslant y$ w drzewie binarnym T jeśli x jest na ścieżce z y do korzenia T.

Dla drzew binarnych R, S, T mówimy, że R jest *kopią* S w T jeśli $V(R) \subseteq V(T)$ oraz istnieje funkcja $f : S \to R$ taka, że

(i) f jest izomorfizmem, a zatem jest bijekcją i $x \leqslant y$ w S wtedy i tylko wtedy gdy $f(x) \leqslant f(y)$ w T;
(ii) dla dowolnych $x, y \in S$ takich, że $x < y$ w S zachodzi: y jest w lewym poddrzewie x w S wtedy i tylko wtedy, gdy $f(y)$ jest w lewym poddrzewie $f(x)$ w T.

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego k-kolorowania wierzchołków T_N istnieje monochromatyczna kopia drzewa T_n w T_N.

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego k-kolorowania kopii T_1 w T_N istnieje kopia R drzewa T_n w T_N taka, że każda kopia T_1 w R ma ten sam kolor.

Zadanie 3. Wykaż, że dowolny zbiór $N \geqslant R^{(3)}(n,n)$ punktów na płaszczyźnie (pozycja ogólna) zawiera n punktów w pozycji wypukłej. (Będzie to jeszcze jeden dowód Twierdzenia Erdősa-Szekeresa).

Zadanie 4. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : 2^{[N]} \to [k]$ (kolorujemy zbiór podzbiorów zbioru $[N]$) istnieją dwa niepuste, rozłączne zbiory $X, Y \subset [N]$ takie, że

$$\text{zbiory } X,\ Y \text{ oraz } X \cup Y \text{ mają ten sam kolor.}$$

Zadanie 5. Niech $S(k)$ będzie najmniejszą liczbą N spełniającą Twierdzenie Schura dla ustalonego k. Wykaż, że

$$S(k) = \Omega(3^k).$$

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > N$ równanie

$$x^k + y^k = z^k \mod p$$

ma nietrywialne rozwiązanie, czyli takie, że p nie dzieli $x \cdot y \cdot z$. (Czyli Wielkie Twierdzenie Fermata nie byłoby prawdziwe gdyby równość obłożyć kongruencją.)

Zadanie 7. Wykaż, że każde 2-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, 325\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości 3.

Zadanie 8. Wykaż, że każde 2-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, 256\}$ zawiera monochromatyczny ciąg geometryczny długości 3.

Zadanie 9. Wykaż, że $\{1, \ldots, \frac{1}{2}(3^n + 1)\}$ zawiera podzbiór mocy 2^n bez ciągu arytmetycznego długości 3.

Zadanie 10. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że

$$c(x) = c(y) = c(z) \quad \text{oraz} \quad x \neq y \quad \text{oraz} \quad x + y = z.$$

Zadanie 11. Dwuosobowa gra (n,k)-Van der Waerdena dla $n, k \geqslant 1$ to: Gra pomiędzy graczem A i graczem B, którzy naprzemiennie wybierają liczby ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Gracz A rozpoczyna. Gracze nie mogą wziąć wcześniej wziętej liczby. Wygrywa pierwsza osoba, która wśród swoich liczb posiada ciąg arytmetyczny długości k.

Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że gracz A ma strategię wygrywającą w (N,k)-grze.

Zadanie 12. Dla $t \geqslant 3$ niech $L(t)$ będzie równaniem $x_1 + \cdots + x_{t-1} = x_t$. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ i dla dowolnego $t \geqslant 3$ istnieje N takie, że dla dowolnego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczne rozwiązanie $L(t)$.

Zadanie 13. Na wykładzie udowodniliśmy, że dla dowolnego $k, \ell \geqslant 2$ zbiór punktów na płaszczyźnie bez k-kubka i ℓ-czapeczki ma rozmiar co najwyżej

$$\binom{k+\ell-4}{k-2}.$$

Wykaż, że to ograniczenie jest optymalne.

Zadanie 14. Niech $\mathrm{ES}(n)$ będzie najmniejszą wartością N dla danego n z Twierdzenia Erdősa-Szekeresa. Wykaż, że

$$\mathrm{ES}(n) \leqslant f(n-1, n) + 1 = \binom{2n-5}{n-2} + 2.$$

Podpowiedź: Rozważ zbiór X wielkości $f(k, \ell)$ i jego najwyższy punkt. Wykaż, że ten punkt tworzy zbiór wypukły wielkości $k+1$ z k-kubkiem w X lub istnieje ℓ-czapeczka w X.

Zadanie 15. Niech X będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Podzbiór $Y \subseteq X$ jest *k-dziurą* jeśli $|Y| = k$, Y jest wypukły i $\mathrm{convex}(Y) \cap X = Y$. Wykaż, że wystarczająco duże zbiory punktów na płaszczyźnie mają 5-dziurę.