Funkcje tworzące 1

Rozważ ciągi $(y_0, y_1, \ldots)$ spełniające równanie

$$y_{n+k} = a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \cdots + a_1y_{n+1} + a_0y_n,$$

dla dowolnego $n \geqslant 0$ i pewnego $k \geqslant 0$. Równanie takiej postaci nazywamy *homogeniczną liniową rekurencją*.
Wielomian charakterystyczny powyższego równania to

$$p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - a_1x - a_0.$$

Propozycja. Niech $p(x)$ będzie wielomianem charakterystycznym powyższego równania.

(i) Jeśli $p(x)$ ma k różnych pierwiastków $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ to: Dla każdego ciągu $y = (y_0, y_1, \ldots)$ spełniającego równanie istnieją stałe $C_1, C_2, \ldots, C_k$ takie, że dla każdego $n \geqslant 0$

$$y_n = C_1\lambda_1^n + \cdots + C_k\lambda_k^n.$$

(ii) Jeśli $p(x)$ ma q różnych pierwiastków $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ o krotnościach $k_1, \ldots, k_q$, gdzie $k_1 + \cdots + k_q = k$ to: Dla każdego ciągu $y = (y_0, y_1, \ldots)$ spełniającego równanie istnieją stałe $C_{i,j}$ gdzie $i = 1, \ldots, q$, $j = 0, \ldots, k_i - 1$ takie, że dla każdego $n \geqslant 0$

$$y_n = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{k_i-1} C_{i,j} \binom{n}{j} \lambda_i^n.$$

Zadania

Zadanie 1. Wykorzystaj funkcje tworzące aby policzyć na ile sposobów można wyciągnąć 70 kul z urny zawierającej 30 kul czerwonych, 40 kul niebieskich i 50 kul białych. Kule tego samego koloru są nierozróżnialne. Kolejność wyciągania jest nieistotna.

Zadanie 2. Jaki jest współczynnik

(i) przy x^5 w $(1 - 2x)^{-2}$;
(ii) przy x^4 w $\sqrt[3]{1 + x}$;
(iii) przy x^3 w $(2 + x)^{3/2}/(1 - x)$?

Zadanie 3. Wyznacz funkcje tworzące następujących ciągów. (Znajdź zwartą postać tych funkcji, to jest bez nieskończonych sum.)

(i) $0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots,$
(ii) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots,$
(iii) $1, 2, 1, 4, 1, 8, \ldots,$
(iv) $\{\binom{c}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c}{2}, \ldots\},$
(v) $\{1, \binom{c}{1}, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \ldots\},$
(vi) $\{1, c, c^2, c^3, \ldots\},$
(vii) $\{1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots\},$

(viii) $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$,
(ix) $\{1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\}$.

Zadanie 4 (+)**.** Niech $G(z)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $\{g_n\}_{n\geqslant 0}$. Jaki ciąg generuje funkcja $G(z) + G(-z)$, a jaki funkcja $G(z) - G(-z)$?

Zadanie 5. Niech a_n będzie liczbą trójek (i, j, k) liczb całkowitych takich, że $i \geqslant 0$, $j \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ oraz $i + 3j + 3k = n$. Znajdź funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \ldots)$ i wyznacz wzór na a_n.

Zadanie 6. Ustal liczbę naturalną $r \geqslant 2$ i niech a_n będzie liczbą r-tupli $(i_1, \ldots, i_r)$ nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i_1 + \cdots + i_r = n$.

(i) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \ldots)$.
(ii) Przy pomocy tej funkcji wyznacz wzór na a_n

Zadanie 7. Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \ldots)$. Wytłumacz dlaczego $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ jest tworzącą $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$. Korzystając z tej obserwacji wyznacz wzór zwarty na:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^2$;
(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3$;
(iii) $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}$, dla dowolnych naturalnych m, n.

Zadanie 8. Wyznacz wzór zwarty na a_n, jeśli

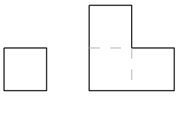
(i) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$,
(ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$,
(iii) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$.

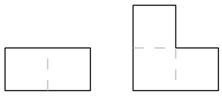
Zadanie 9. Rozwiąż równania rekurencyjne:

(i) $a_0 = 4$, $a_1 = 4$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$,
(ii) $a_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
(iii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$,
(iv) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
(v) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,
(vi) $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 11$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n$,
(vii) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.
(viii) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$.
(ix) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.

Zadanie 10. Korzystając z funkcji tworzących wyznacz liczbę ciągów długości n nad alfabetem $\{a, b, c, d\}$ takich, że a nigdy nie jest przy b.

Zadanie 11 (Mini-Tetris)**.** Wykorzystaj funkcje tworzące aby określić asymptotykę (względem n) liczby sposobów na jakie możemy wypełnić prostokąt $n \times 2$ kawałkami typu:

(i)  ;

(ii)  .

Zadanie 12. Wykaż, że

$$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right],$$

jest liczbą całkowitą dla każdego $n \geqslant 1$.

Zadanie 13. Wykaż, że liczba

$$(6+\sqrt{37})^{999}$$

ma co najmniej 999 zer na początku zapisu dziesiętnego części ułamkowej.

Zadanie 14. Wykaż, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ liczba

$$(\sqrt{2}-1)^n$$

może być zapisana jako różnica pierwiastków (drugiego stopnia) dwu kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 15. Przedstaw w postaci zwartej splot liczb Fibonacciego, czyli

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k}.$$

Zadanie 16. Wyznacz zwartą postac funkcji tworzącej dla ciągu $(F_{2n})_{n \geqslant 0}$, gdzie F_i jest i-tą liczbą Fibonacciego.

Zadanie 17. Wyraź sumy

$$S_n = \binom{2n}{0} + 2\binom{2n-1}{1} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

jako współczynniki przy x^{2n} pewnego szeregu i znajdź wzór zwarty na S_n.