Kolorowanie grafów

Liczba chromatyczna grafu G, oznaczana przez $\chi(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje poprawne kolorowanie wierzchołków grafu G używające k kolorów.

Liczba kolorująca grafu G, oznaczana przez $\mathrm{col}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje uporządkowanie wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$ grafu G w którym dla kazdego i wierzchołek v_i ma mniej niż k sąsiadów na lewo.

Dla danego grafu G i uporządkowania jego wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$ algorytm kolorowania *First-Fit* przyporządkowuje najmniejsze legalne kolory kolejnym wierzchołkom G według podanego porządku.

Indeks chromatyczny grafu G, oznaczany przez $\chi'(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje poprawne kolorowanie krawędzi (dwie krawędzie o wspólnym końcu muszą mieć różne kolory) grafu G używające k kolorów.

Zadanie 1. Rozpatrzmy graf Q_k w którym wierzchołkami są wszystkie podzbiory $(k-1)$-elementowe zbioru $(2k-1)$-elementowego, zaś pomiędzy dwoma zbiorami istnieje krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentujące je zbiory mają puste przecięcie. Wykaż, że $\chi(Q_k) = 3$ dla każdego $k \geqslant 2$.

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdego wierzchołka v grafu G istnieje $t > 0$ takie, że liczba chromatyczna podgrafu indukowanego przez wierzchołki w odległości dokładnie t od v jest większa bądź równa $\lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil$.

Zadanie 3. Wykaż, że

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1 \text{ oraz } \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n,$$

gdzie $\overline{G}$ jest dopełnieniem grafu G.

Zadanie 4. Załóżmy, że graf G można pokolorować tak, że każda klasa kolorów posiada co najmniej 2 elementy. Wykaż, że G można pokolorować $\chi(G)$ kolorami tak, że każda klasa jest co najmniej 2 elementowa.

Zadanie 5. Załózmy, że zbiór wierzchołków grafu G można podzielić na k części $V_1, \ldots, V_k$ tak, że dla dowolnych dwóch zbiorów $V_i \neq V_j$ istnieją dwa wierzchołki $x \in V_i$ oraz $y \in V_j$, które nie są połączone krawędzią w G. Wykaż, że graf G można pokolorować $n - k + 1$ kolorami, gdzie n to ilość wierzchołków grafu G.

Zadanie 6. (i) Wykaż, dla każdego grafu G istnieje uporządkowanie wierzchołków dla którego kolorowanie First-Fit używa $\chi(G)$ kolorów.

(ii) Wykaż, że dla każdego $n > 1$ istnieje graf dwudzielny i uporządkowanie jego wierzchołków takie, że algorytm First-Fit używa n kolorów.

Zadanie 7. Wykaż, że następujące zdania są równoważne: dla dowolnego grafu G

(i) $\chi(G) \leqslant k$;

(ii) G ma orientację krawędzi bez ścieżki skierowanej długości k (długość ścieżki to liczba jej krawędzi);

(iii) G ma acykliczną orientację krawędzi bez ścieżki skierowanej długości k.

Zadanie 8. Wykaż, że dla dowolnego gragu dwudzielnego G

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Zadanie 9. Oblicz indeks chromatyczny kliki K_n dla dowolnego n.

Zadanie 10. Wykaż, że dla dowolnego grafu G mamy

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$