

## Kolorowanie grafów 2

$\omega(G)$  — liczba klikowa grafu  $G$

$\chi(G)$  — liczba chromatyczna grafu  $G$

$col(G)$  — liczba kolorująca grafu  $G$

**Zadanie 1.** Wykaż, że istnieje funkcja  $f$  taka, że dla dowolnego grafu przedziałowego  $G$  algorytm kolorujący First-Fit używa co najwyżej  $f(\omega(G))$  kolorów na  $G$ .

Jak bardzo potrafisz ograniczyć asymptotykę  $f$ ? Spróbuj wskazać  $f(\omega)$  wielomianowe względem  $\omega$ . (Istnieje dość prosty argument dla  $f(\omega) = O(\omega^2)$ .)

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla każdego  $n$  istnieje drzewo  $T_n$  oraz permutacja  $\pi$  wierzchołków  $T_n$  taka, że algorytm First-Fit kolorujący wierzchołki  $T_n$  w kolejności  $\pi$  użyje  $n$  kolorów.

**Zadanie 3.** Wykaż, że graf  $G$  ma orientację krawędzi taką, że każdy wierzchołek ma co najwyżej  $d$  krawędzi wychodzących wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max_{H \subset G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \leq d.$$

**Zadanie 4.** Dla  $n > 1$ ,  $k \geq 2$  uogólniony shift graf  $G_{n,k}$  to graf o wierzchołkach  $V(G_{n,k}) = \binom{[n]}{k}$ . Dwie  $k$ -tki  $\{x_1 < \dots < x_k\}$ ,  $\{y_1 < \dots < y_k\}$  są połączone krawędzią w  $G_{n,k}$  jeśli  $x_2 = y_1, \dots, x_k = y_{k-1}$  lub  $y_2 = x_1, \dots, y_k = x_{k-1}$ . Wykaż, że dla dowolnego ustalonego  $k$ , rodzina grafów  $\{G_{n,k}\}_{n>1}$  ma nieograniczoną liczbę chromatyczną.

**Zadanie 5.**

- (i) Jakiej długości jest najmniejszy cykl w uogólnionym shift grafie  $G_{n,k}$ ?
- (ii) Jakiej długości jest najmniejszy cykl nieparzysty w uogólnionym shift grafie  $G_{n,k}$ ?

**Zadanie 6.** Wykaż, że klasa grafów przecięć prostokątów na płaszczyźnie (o bokach równoległych do osi) jest  $\chi$ -ograniczona (istnieje  $f$  taka, że dla każdego grafu  $G$  z klasy mamy  $\chi(G) \leq f(\omega(G))$ ).

**Zadanie 7.** Niech  $D$  będzie grafem skierowanym. *Kolorowanie łukowe*  $D$  to dowolne kolorowanie krawędzi  $D$  takie, że  $(a, b)$  i  $(b, c)$  mają różne kolory dla dowolnych  $(a, b), (b, c) \in E(D)$ . *Łukowa liczba chromatyczna*  $D$ , oznaczana  $A(D)$  to najmniejsza liczba kolorów jaką można pokolorować łukowo  $D$ . Wykaż, że

$$A(D) \geq \log \chi(D).$$

**Zadanie 8.** Wykaż, że jeśli graf  $G$  ma  $n$  wierzchołków oraz  $col(G) = d$  to algorytm First-Fit kolorujący wierzchołki grafu  $G$  (wzdłuż dowolnej permutacji wierzchołków  $G$ ) użyje co najwyżej

$$ck \log n$$

kolorów ( $c$  jest stałą, coś koło 4).