Liczby Stirlinga, zasada włączeń i wyłączeń, liczby Eulera

Liczba harmoniczna H_n dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_1$ jest zdefiniowana wzorem $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Multizbiór X nad zbiorem U to rodzina $\{x_u\}_{u \in U}$, gdzie $x_u \in \mathbb{N}$ dla każdego $u \in U$. Wtedy *rozmiar* X to $\sum_{u \in U} x_u$. Jeśli X ma rozmiar k to mówimy czasami, że jest k*-multizbiorem*. Dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$, liczba k-multizbiorów nad zbiorem n-elementowym to

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n-k-1}{k}.$$

Liczba Stirlinga drugiego rodzaju $\left\{ {n \atop k} \right\}$, dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$, to liczba podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych (nierozróżnialnych) podzbiorów. Zatem $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$, a ponadto dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy:

(i) $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ jeśli $n > 0$,
(ii) $\left\{ {0 \atop k} \right\} = 0$ jeśli $k > 0$,
(iii) $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ jeśli $n > 0$,
(iv) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ jeśli $n \geqslant 2$,
(v) $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$,
(vi) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$ jeśli $n \geqslant 2$,

(vii)
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \text{ jeśli } n, k > 0.$$

Liczba Stirlinga pierwszego rodzaju $\left[{n \atop k} \right]$, dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$, to liczba permutacji zbioru n-elementowego złożonych z k cykli. Zatem $\left[{0 \atop 0} \right] = 1$, a ponadto dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy:

(i) $\left[{n \atop 0} \right] = 0$ jeśli $n > 0$,
(ii) $\left[{0 \atop k} \right] = 0$ jeśli $k > 0$,
(iii) $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$ jeśli $n > 0$,
(iv) $\left[{n \atop n} \right] = 1$,
(v) $\left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}$ jeśli $n \geqslant 2$,

(vi)
$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right] \text{ jeśli } n, k > 0.$$

Liczba Bella $\mathrm{B}(n)$, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$, to liczba relacji równoważności na zbiorze n-elementowym.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mamy następujące tożsamości:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \qquad \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} = \mathrm{B}(n), \qquad \sum_{i=0}^{n} \left[{n \atop i} \right] = n!.$$

Potęgi kroczące $x^{\underline{k}}$ oraz $x^{\overline{k}}$, dla ustalonych $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$, zadane są przez

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1),$$
$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1).$$

Na wykładzie widzieliśmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}} \quad \text{oraz} \quad x^{\overline{n}} = \sum_k \left[n \atop k \right] x^k.$$

Liczby Stirlinga

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje $k \in \mathbb{N}_1$ takie, że

$$\left[n \atop 0 \right] < \left[n \atop 1 \right] < \cdots < \left[n \atop k-1 \right] \leqslant \left[n \atop k \right] > \left[n \atop k+1 \right] > \cdots > \left[n \atop n \right].$$

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left\{ n \atop k+1 \right\} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} \cdots \binom{i_1}{i_0}.$$

Posługując się tą tożsamością wylicz postać zwartą $\left\{ n \atop 3 \right\}$.

Zadanie 3. Dla ustalonych $n, m, \ell \in \mathbb{N}$, posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż:

$$\left\{ n+1 \atop m+1 \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ k \atop m \right\} (m+1)^{n-k}, \tag{a}$$

$$\left[n+1 \atop m+1 \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[k \atop m \right] n^{\underline{n-k}} = n! \sum_{k=0}^{n} \left[k \atop m \right] / k!, \tag{b}$$

$$\left\{ m+n+1 \atop m \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ n+k \atop k \right\}, \tag{c}$$

$$\left[m+n+1 \atop m \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[n+k \atop k \right], \tag{d}$$

$$\left\{ n \atop \ell+m \right\} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ k \atop \ell \right\} \left\{ n-k \atop m \right\} \binom{n}{k}, \tag{e}$$

$$\left[n \atop \ell+m \right] \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_{k=0}^{n} \left[k \atop \ell \right] \left[n-k \atop m \right] \binom{n}{k}. \tag{f}$$

Zadanie 4. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n! \cdot H_n = \sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Na rozgrzewkę, wykaż interpretacją kombinatoryczną, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} = \sum_k \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix}.$$

Następnie, również interpretacją kombinatoryczną wykaż zdecydowanie trudniejszą tożsamość (która jest uogólnieniem tożsamości w zadaniu 4); dla każdego $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}.$$

Zadanie 6. Wykorzystując tożsamość $x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$ wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} \quad \text{oraz} \quad x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

Zadanie 7. Korzystając z faktu, że zbiory $\{x^i : i \in \mathbb{N}\}$ i $\{x^{\overline{i}} : i \in \mathbb{N}\}$ są bazami przestrzeni wielomianów, wykaż że dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = [m = n] = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}.$$

Zadanie 8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że permutacja σ zbioru $[n]$ jest *alternująca* jeśli dla każdej liczby parzystej $i \in [n]$, $\sigma(i-1) > \sigma(i)$ i $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ (o ile $i \neq n$). Niech E_n będzie liczbą permutacji alternujących $[n]$. Zatem $E_0 = E_1 = 1$. Udowodnij, że

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

Zasada włączeń i wyłączeń

Na przykładzie zaprezentujemy dwie techniki, które są przydatne przy kilku następnych zadaniach.

Przykład. Udowodnij, że dla każdego $n, m \in \mathbb{N}$ z $n > m$ zachodzi

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{m} (-1)^k = 0.$$

Szkic rozwiązania 1. Planujemy skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń. Rozważmy uniwersum $U = \binom{[n]}{m}$. Niech $A_i = \{X \in U : i \notin X\}$ dla każdego $i \in [n]$. Zauważmy, że $n > m$ implikuje $U = \bigcup_{i\in[n]} A_i$. Dla niepustego $I \subseteq [n]$ rozważmy $\bigcap_{i\in I} A_i$. Taki zbiór zawiera wszystkie $X \in U$ takie, że $X \cap I = \emptyset$. Innymi słowy, możemy wybierać elementy jedynie ze zbioru $[n]\backslash I$. Czyli $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \binom{n-|I|}{m}$. Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń mamy

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} = |U| = \left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \sum_{\substack{I\subseteq[n]\\ I\neq\emptyset}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| (-1)^{|I|+1} &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{m}(-1)^{j+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Przyglądając się wystarczająco długo widzimy, że jest to wymagana tożsamość.

Szkic rozwiązania 2. Niech $U = \{(S,T) : S \subseteq T \subseteq [n], |S| = m\}$. Niech

$$\mathcal{E} = \{(S,T) \in U : |T| \text{ jest parzyste}\} \quad \text{i} \quad \mathcal{O} = \{(S,T) \in U : |T| \text{ jest nieparzyste}\}.$$

Zauważmy, że wystarczy pokazać, że $|\mathcal{E}| = |\mathcal{O}|$. Niech $(S,T) \in U$ i niech $x \in [n]$ będzie najmniejszym elementem takim, że $x \notin S$. Niech

$$f((S,T)) = (S,T'),\ \text{gdzie } T' = \begin{cases} T \cup \{x\} & \text{jeśli } x \notin T, \\ T \setminus \{x\} & \text{jeśli } x \in T. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że f przeprowadza bijektywnie $\mathcal{E}$ w $\mathcal{O}$.

Zadanie 9. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$ z $n > m$:

$$\sum_k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{k}{m}\!\!\right) (-1)^k = 0.$$

Zadanie 10. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k} = \left\{ {n \atop m} \right\}.$$

Zadanie 11. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} (-1)^k = n+1.$$

Wskazówka: Rozważ liczbę kolorowań zbioru $[n]$ na czarny i biały, takich, że nie istnieje $i < n$ pokolorowane na biało, gdzie $i+1$ jest pokolorowane na czarno.

Zadanie 12. Korzystając z interpretacji kombinatorycznej, udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$ z $n > m$:

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = 0.$$

Uwaga: ta tożsamość pojawiła się już w zadaniu 7.

Wskazówka: Powiedzmy, że mamy n osób, które sadzamy przy k okrągłych stołach, a potem rozdzielamy stoły do m sal. Osoby są rozróznialne, a stoły i sale są nierozróżnialne. Można pokazać bijekcję między konfiguracjami, gdzie k jest parzyste i nieparzyste. W tym celu należy zlokalizować osobę z najniższym numerem, która jest z kimś w sali.

Zadanie 13. Udowodnij, że dla każdego $n, m \in \mathbb{N}$ z $n \geqslant m$:

$$n^{\underline{n-m}} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{m-k}.$$

Liczby Bella

Zadanie 14. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{B}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \mathrm{B}(i).$$

Zadanie 15. Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne $\{a_{i,j}\}_{1 \leqslant i \leqslant j}$.

(i) $a_{0,0} = 1$,
(ii) $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, dla $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, dla $n, k \in \mathbb{N}$ z $n \geqslant k$.

Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\mathrm{B}(n) = a_{n,0}$.

Liczby Eulera

Liczba Eulera $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$, to liczba permutacji $[n]$, które mają k wzniesień, to znaczy takich permutacji σ, że

$$|\{i \in [n-1] : \sigma(i) < \sigma(i+1)\}| = k.$$

Zadanie 16. Niech $n \in \mathbb{N}_1$, $k \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant k$. Udowodnij, że

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-k-1} \right\rangle.$$

Ponadto, udowodnij, że

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle.$$

Zadanie 17. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$:

$$m^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+k}{n}. \tag{$\star$}$$

Zadanie 18. Podaj interpretację kombinatoryczną tożsamości ($\star$).

Zadanie 19. Korzystając z ($\star$) wyprowadź wzór na sumę $1^2 + 2^2 + \cdots + N^2$ i na sumę $1^3 + 2^3 + \cdots + N^3$ dla wszystkich $N \in \mathbb{N}_1$.

Zadanie 20. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n (-1)^k.$$

Zadanie 21. Oczywiście m^n zlicza wszystkie funkcje z $[n]$ w $[m]$. Przypomnij sobie, że wszystkich suriekcji z $[n]$ w $[m]$ jest $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$. Okazuje się, że liczba Eulera może być przydatna również przy zliczaniu suriekcji. Udowodnij interpretacją kombinatoryczną, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$ z $n \geqslant m$:

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m}.$$

Zadanie bonusowe do spisania (1,5 pkt)

Problem 1. Korzystając z interpretacji kombinatorycznej, udowodnij że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$ z $n > m$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = 0.$$

Uwaga: ta tożsamość pojawiła się już w zadaniu 7.

Problem 2. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{m-k}.$$

Problem 3. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\left[{n \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[{n+1 \atop k+1} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}.$$

Każdy problem jest wart 0,5 punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 17 marca 23:59.