Funkcje tworzące I

Dla wszystkich $k, m \in \mathbb{N}_1$ i $a, A \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mamy

$$\frac{A}{(1-ax^k)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} A\binom{n+m-1}{m-1} a^n x^{kn}.$$

Twierdzenie o rozwiązywaniu rekurencji jednorodnych. Załóżmy, że dla ciągu zespolonego $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ istnieją $d \in \mathbb{N}_1$ i $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i a_{n+i}.$$

Wtedy

$$Q(x) = x^d - \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i x^i$$

nazywamy *wielomianem charakterystycznym* dla tej zależności rekurencyjnej. Powiedzmy, że

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{q} (x - \lambda_j)^{d_j}$$

dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{C}$ i $d_1, \ldots, d_q \in \mathbb{N}_1$ takich, że $d_1 + \cdots + d_q = d$. Wtedy istnieją stałe $D_{j,i} \in \mathbb{C}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{d_j-1} D_{j,i} n^i \lambda_j^n.$$

Aby dla konkretnego ciągu wyliczyć te stałe należy utworzyć układ równań zadany przez wyrazy początkowe.

Zwarty wzór lub *zwarta postać* to taka, która nie zawiera znaku sumy lub produktu lub wielokropka.

Zadania

Zadanie 1. Niech F będzie ciałem i $A(x) \in F[[x]]$. Udowodnij, że szereg formalny $A(x)$ jest odwracalny w $F[[x]]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A(0) \neq 0$.

Uwaga: Pamiętaj, że $A(0)$ jest zdefiniowane jako współczynnik przy x^0 w szeregu formalnym $A(x)$. Ponadto, pamiętaj, że szereg formalny $A(x)$ jest odwracalny w $F[[x]]$, gdy istnieje $B(x) \in F[[x]]$ taki, że $A(x)B(x) = 1$, gdzie $1 = \sum_{n=0}^{\infty} [n = 0] x^n \in F[[x]]$ oraz notacja $[\cdots]$ przyjmuje wartości 1 i 0 rozumiane jako odpowiednio jedynka i zero ciała F.

Zadanie 2. Niech $G(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Jaki ciąg generuje funkcja $G(x)+G(-x)$, a jaki funkcja $G(x)-G(-x)$? Zaaplikuj powyższe, aby wyznaczyć zwartą postać funkcji tworzącej ciągu $(F_{2n})_{n=0}^{\infty}$.

Zadanie 3. Znajdź zwartą postać funkcji tworzących następujących ciągów.

(i) $0,0,0,0,-6,6,-6,6,-6,\ldots$;
(ii) $1,2,1,4,1,8,1,16,1,32,\ldots$;
(iii) $1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots$;

Zadanie 4. Niech $m\in\mathbb{N}$. Znajdź zwartą postać funkcji tworzących następujących ciągów.

(i) $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, (ii) $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$, (iii) $\left(\binom{n}{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadanie 5. Znajdź zwartą postać funkcji tworzących następujących ciągów. *Uwaga:* W niektórych przypadkach może zajść potrzeba interpretacji funkcji tworzącej jako funkcji rzeczywistej/zespolonej, aby uzyskać taką postać.

(i) $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (ii) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (iii) $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadanie 6. Na wykładzie zaobserwowaliśmy następujący fakt. Jeśli $A(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to $\frac{1}{1-x}A(x)$ jest funkcją tworzącą dla sum częściowych tego ciągu. Przemyśl jeszcze raz dlaczego tak faktycznie jest. Następnie, korzystając z powyższej obserwacji wyprowadź zwarte wzory (bez sum) na następujące wyrażenia dla wszystkich $n,m\in\mathbb{N}$:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^2$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3$, (iii) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Zadanie 7. Niech $D_1=1$ i niech $D_n=\sum_{j=1}^{n-1} D_jD_{n-j}$ dla każego $n\in\mathbb{N}_2$. Korzystając z technik funkcji tworzących wyraź D_n za pomocą liczb Catalana.

Zadanie 8. Znajdź funkcję tworzącą ciągu liczb Motzkina.

Zadanie 9. Wykorzystaj funkcję tworzącą liczb Motzkina, żeby udowodnić, że M_n jest $O(3^n)$.

Zadanie 10. Dla każdego $n\in\mathbb{N}$, przedstaw w postaci zwartej wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{n} F_kF_{n-k}.$$

Zadanie 11. Rozwiąż równania rekurencyjne:

(i) $a_0=2,\ a_1=3,\ a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$,
(ii) $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$,
(iii) $a_0=4,\ a_1=4,\ a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$,
(iv) $a_0=2,\ a_1=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$,

(v) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
(vi) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,
(vii) $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 11$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n$.

Zadanie 12. Sformułuj i udowodnij **twierdzenie o rozwiązywaniu rekurencji niejednorodnych** analogiczne do rozwiązywania rekurencji jednorodnych. To znaczy, załóż, że dla ciągów zespolonych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ istnieją $d \in \mathbb{N}_1$ i $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i a_{n+i} + r_n.$$

Ponadto, niech $R(x)$ będzie funkcją tworzącą dla $(r_n)_{n=0}^{\infty}$. Znajdź postać funkcji tworzącej ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i na jej podstawie znajdź wzór na a_n.

Zadanie 13. Rozwiąż równania rekurencyjne:

(i) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$,
(ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$,
(iii) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$,
(iv) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$,
(v) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.

Zadanie 14. Niech $u_0 = 1, u_1 = 0$ i $v_0 = 0, v_1 = 1$. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$u_{n+2} = 2v_{n+1} + u_n \quad \text{i} \quad v_{n+2} = u_{n+1} + v_n.$$

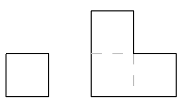
Wyznacz zwarty wzór na u_n.

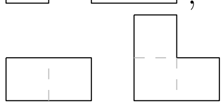
Wskazówka: Z rekurencji dostaniemy układ równań z $U(x)$ i $V(x)$. Powinno nie być trudno go rozwiązać, a następnie wyrazić obie te funkcje w terminach odpowiednio zdefiniowanej prostrzej funkcji, która da rozwiązanie.

Zadanie 15. Dla $n \in \mathbb{N}$, ile jest trójek $(i, j, k) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}$ takich, że $i + 2j + 2k = n$? Rozwiąż zadanie wyznaczając funkcję tworzącą odpowiedniego ciągu.

Zadanie 16. Korzystając z funkcji tworzących, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, wyznacz liczbę ciągów długości n nad alfabetem $\{a, b, c, d\}$ takich, że a nigdy nie jest przy b.

Zadanie 17. Korzystając z funkcji tworzących, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, wyznacz liczbę sposobów na jakie możemy wypełnić prostokąt $n \times 2$ kawałkami typu:

(i)  ;

(ii)  .

Zadanie 18. Wykaż, że

$$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right],$$

jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$.

Zadanie 19. Wykaż, że liczba

$$(6+\sqrt{37})^{999}$$

ma co najmniej 999 zer na początku zapisu dziesiętnego części ułamkowej.

Zadanie 20. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_1$ liczba

$$(\sqrt{2}-1)^n$$

może być zapisana jako różnica pierwiastków (drugiego stopnia) dwu kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie bonusowe do spisania

Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech u_n będzie liczbą pokryć planszy $3 \times n$ kostkami domina. Czyli $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 0, u_4 = 11$ i tak dalej. Niech t_n będzie n-tą liczbą trójkątną, czyli $t_n = n(n+1)/2$. Niech p_n będzie n-tą liczbą pięciokątną, czyli $p_n = n(3n-1)/2$.

Problem 1. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $t_{(u_{4n+2}-1)/2}$ jest liczbą pięciokątną.

Dla $a, b \in \mathbb{Z}$, niech $\{an+b\}_n = \{an+b : n \in \mathbb{N}\}$ (są to ciągi arytmetyczne). Zbiór ciągów arytmetycznych $\{\{a_i n + b_i\}_n : i \in [m]\}$ jest *dokładnym pokryciem* każda liczba naturalna występuje w dokładnie jednym z nich.

Problem 2. Przedstaw dowód następującego faktu opierający się na funkcjach tworzących. Jeśli $\{\{a_i n + b_i\}_n : i \in [m]\}$ jest dokładnym pokryciem to $a_{m-1} = a_m$.

Każdy problem jest wart 0,5 punkta. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 7 kwietnia 23:59.