Posety i zbiory

Twierdzenie (dualne do Dilwortha)**.** Dowolny skończony poset o wysokości h można podzielić na h antyłańcuchów.

Twierdzenie (Dilworth; 1950)**.** Dowolny skończony poset o szerokości w można podzielić na w łańcuchów.

Twierdzenie (Erdős, Szekeres; 1935)**.** Dowolny ciąg $m \cdot n + 1$ liczb rzeczywistych zawiera podciąg niemalejący długości $m + 1$ lub podciąg nierosnący długości $n + 1$.

Twierdzenie (Sperner; 1928)**.** Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$, mamy $A \not\subseteq B$. Wtedy

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Twierdzenie (Erdős–Ko–Rado; 1961)**.** Niech $n \geqslant 2k$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną k-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$. Wtedy

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}.$$

Dla $n \in \mathbb{N}_1$, niech $\mathcal{B}_n = (2^{[n]}, \subseteq)$.

Zadania

Zadanie 1. Wykaż, że spośród dowolnych trzech permutacji zbioru $[n]$ istnieją dwie zawierające wspólny podciąg długości co najmniej $n^{1/3}$.

Zadanie 2. Niech I będzie rodziną n przedziałów na osi rzeczywistej. Wykaż, że I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów parami rozłącznych lub I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów takich, że wszystkie posiadają wspólny punkt.

Zadanie 3. Niech $n, k \in \mathbb{N}_1$. Niech I będzie rodziną n przedziałów na osi rzeczywistej. Wykaż, że

(i) istnieje $J \subseteq I$ taki, że $|J| = k$ i dla dowolnych $A, B \in J$ mamy $A \subseteq B$ lub $A \supseteq B$, lub
(ii) istnieje $J' \subseteq I$ taki, że $|J'| \geqslant n/k$ i dla dowolnych $A \neq B \in J'$ mamy $A \not\subseteq B$.

Zadanie 4. Niech $n \in \mathbb{N}_1$.

(i) Ile krawędzi ma diagram $\mathcal{B}_n$?
(ii) Ile antyłańcuchów długości 2 ma $\mathcal{B}_n$?

Zadanie 5. Niech $n \in \mathbb{N}_2$. Ile łańcuchów długości 3 ma $\mathcal{B}_n$?

Zadanie 6. Udowodnij, że rodziny $\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$ i $\binom{[n]}{\lceil n/2 \rceil}$ to jedyne antyłańcuchy w $\mathcal{B}_n = (\mathcal{P}(n), \subseteq)$ świadczące szerokość $\mathcal{B}_n$.

Zadanie 7. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $|a_i| \geqslant 1$ dla każdego $i \in [n]$. Niech

$$P(a_1, \ldots, a_n) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot a_i < 1\}.$$

Wykaż, że $|P(a_1, \ldots, a_n)| \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że nie istnieją $A, B, C \in \mathcal{F}$ dla których $A \subsetneq B \subsetneq C$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Uwaga: Zadanie jest dużo ciekawsze dla n parzystego.

Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ jest *przecinająca się*, jeśli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$.

Zadanie 9. Niech $n, k \in \mathbb{N}_1$ i niech $2k \leqslant n$. Przypomnij sobie, że każda rodzina przecinająca się podzbiorów $[n]$ ma co najwyżej 2^{n-1} elementów. Skonstruuj rodzinę przecinającą się podzbiorów $[n]$, która ma 2^{n-1} elementów i której najmniejszy zbiór ma k elementów.

Zadanie 10. Niech S_i będzie operacją przesunięcia z wykładu. Pokaż, że jeśli $\mathcal{F}$ jest przecinająca się to $S_i(\mathcal{F})$ też jest przecinająca się.

Zadanie 11. Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest *rozróżniająca* jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest *silnie rozróżniająca* jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takie, że $x \in F_1 - F_2$ i $y \in F_2 - F_1$.

(i) Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny rozróżniającej $[n]$?
(ii) Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny silnie rozróżniającej $[n]$?

Zadanie 12. Niech $s, r, n \in \mathbb{N}_1$ takie, że $s < r < n$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów r-elementowych zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$ mamy $|A \cap B| \leqslant s$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leqslant \frac{\binom{n}{s+1}}{\binom{r}{s+1}}.$$

Zadanie 13. Niech $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ będzie rodziną zbiorów r-elementowych i $\mathcal{G} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ będzie rodziną zbiorów s-elementowych oraz niech

(i) $A_i \cap B_i = \emptyset$ dla każdego $i \in [m]$,
(ii) $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ dla każdych $i \neq j$, $i, j \in [m]$.

Wykaż, że

$$m \leqslant \binom{r+s}{s}.$$

Wskazówka. Spróbuj wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leqslant 1.$$

Zadanie 14 (Ćwiczenie z wykładu)**.** Niech $k, m \in \mathbb{N}_1$. Liczby $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_s, s \in \mathbb{N}_1$ stanowią *reprezentację k-kaskadową m* jeśli $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_s \geqslant s$ oraz

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_s}{s}.$$

Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna reprezentacja k-kaskadowa m.

Niech $k, m \in \mathbb{N}_1$. Niech $F_k(m)$ będzie rodziną pierwszych m zbiorów w porządku co-LEX na $\binom{\mathbb{N}}{k}$.

Zadanie 15. Pokaż, że dla każdego $k, m \in \mathbb{N}_1$ mamy $|\Delta F_k(m+1)| \leqslant |\Delta F_k(m)| + (k-1)$.

Zadanie 16. Pokaż, że dla każdego $k, m \in \mathbb{N}_1$ istnieje $m' \in \mathbb{N}_1$ takie, że $\Delta F_k(m) = F_{k-1}(m')$.

Zadanie 17. Niech $n \in \mathbb{N}_1$ i niech $k \in [n+1]$. Niech $\mathcal{C}$ będzie podziałem na symetryczne łańcuchy $\mathcal{B}_n$. Ile łańcuchów rozmiaru k jest w $\mathcal{C}$?

Zadanie 18. Znajdź nieskończony poset, który nie ma nieskończonego antyłańcucha i nie jest sumą skończenie wielu łańcuchów. Zatem, twierdzenie Dilwortha nie zachodzi dla nieskończonych posetów.

Zadanie 19. Udowodnij, że każdy nieskończony poset zawiera nieskończony łańcuch lub nieskończony antyłańcuch.

Zadanie bonusowe do spisania

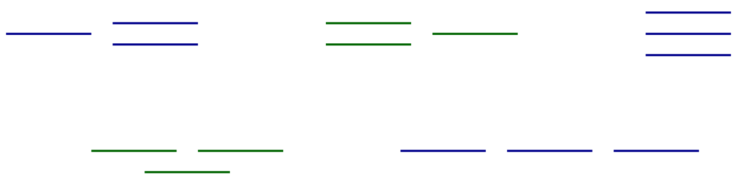
Poset przedziałowy to taki, ktorego elementy są domkniętymi przedziałami liczb rzeczywistych, a relacja jest zdefiniowana następująco: $[a, b] < [c, d]$ jeśli $b < c$.

Problem 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Ile jest różnych n-elementowych posetów przedziałowych, które mają reprezentacje taką, że wszystkie przedziały są równej długości? Patrz rysunek 1.

Problem 2. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Rozważmy n punktów na okręgu, gdzie każdy punkt ma przypisaną unikalną etykietę ze zbioru $[n]$ (cykliczna permutacja). Dla $k \in [n]$, *k-łukiem* nazywamy zbiór k kolejnych punktów na okręgu. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną k-łuków takich, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_h \in \mathcal{A}$ mamy $A_1 \cap \cdots \cap A_h \neq \emptyset$. Pokaż, że jeśli $k \cdot h \leqslant (h-1) \cdot n$ to $|\mathcal{A}| \leqslant k$.

Zauważ, że powyższe może być użyte do udowodnienia następującego uogólnienia twierdzenia Erdősa-Ko-Rado (powtarzając jego dowód). Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną k-elementowych podzbiorów $[n]$ taką, że dla wszystkich $A_1, \ldots, A_h$ mamy $A_1 \cap \cdots \cap A_h \neq \emptyset$. Jeśli $k \cdot h \leqslant (h-1) \cdot n$ to $|\mathcal{A}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.

Kazdy problem jest warty 0,5 punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 28 kwietnia 23:59.



Rysunek 1: Wszystkie takie posety na 3 przedziałach.