KOLOKWIUM Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
29 kwietnia 2010

Każde zadanie proszę rozwiązać na osobnej kartce. Każda kartka powinna być podpisana imieniem i nazwiskiem. W trakcie kolokwium nie można korzystać z urządzeń elektronicznych.

Zadanie 1 (3pkt). *Zrównoważonym drzewem binarnym nazywamy drzewo binarne, w którym różnica wysokości lewego i prawego poddrzewa nie przekracza* 1. Wyznacz minimalną liczbę wierzchołków f_n w zrównoważonym drzewie binarnym o wysokości n. Przedstaw zwartą postać funkcji tworzącej $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

Zadanie 2 (3pkt). Oblicz $49^{528} \mod 2010$.

Zadanie 3 (3pkt). Znaleźć liczbę ścieżek, którymi można przejść z punktu o współrzędnych $(0,0)$ do punktu o współrzędnych $(5n, n)$ poruszając się w każdym kroku wzdłóż jednego z wektorów: $(1,1)$ lub $(1,-3)$.

Zadanie 4 (3pkt). Podaj dowód kombinatoryczny następującej tożsamości:

$$\sum_{k \leqslant n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}.$$

Zadanie 5 (3pkt). Znajdź funkcję tworzacą ciągu u_n zadanego rekurencyjnie

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} - 2u_n = n\alpha^n\ (n \geqslant 0).$$

Wyprowadź wzór na $n-$ty wyraz ciagu u_n w zależności od parametru α.

Zadanie 6 ($\star$, 3pkt). Niech p_n będzie $n-$tą liczbą pierwszą ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.). Wykaż, że:

$$p_n < 2^{2^{n-1}} \text{ dla } n \geqslant 2.$$