Kolokwium 1

Zadanie 1 (`3 pkt`)**.** W ilu macierzach zero-jedynkowych o wymiarach $n \times n$ przynajmniej jeden wiersz jest wypełniony zerami?

Zadanie 2 (`3 pkt`)**.** Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.

Zadanie 3. Ile jest podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, m^2\}$

(i) (`3 pkt`) niezawierających dwu liczb o różnicy podzielnej przez m?
(ii) (`3 pkt`) niezawierających dwu liczb o różnicy równej m?
(iii) (`4 pkt`) niezawierających dwu liczb o sumie podzielnej przez m?

Zadanie 4 (`4 pkt`)**.** Niech G będzie gridem $n \times n$, czyli $G = \{(a, b) : 1 \leqslant a, b \leqslant n\}$. Ile jest par $((a, b), (a', b')) \in G \times G$ takich, że $a \leqslant a'$ i $b \leqslant b'$?

Zadanie 5 (`4+3+1 pkt`)**.** Wykaż, że

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k},$$

$$\left[{n \atop l+m} \right] \binom{l+m}{l} = \sum_{k} \left[{k \atop l} \right] \left[{n-k \atop m} \right] \binom{n}{k},$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{k} \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}. \qquad (*)$$

Zadanie 6 (`3 pkt`)**.** Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi oraz $a^p \equiv_q a$ oraz $a^q \equiv_p a$. Wykaż, że $a^{pq} \equiv_{pq} a$.

Zadanie 7 (`4 pkt`)**.** Wyprowadź odwrócony wzór Möbiusa to jest: dla dowolnych funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$g(n) = \sum_{d|n, d>0} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \sum_{d|n, d>0} g(d).$$

Powodzenia.