THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

Kolokwium 2

Zadanie 1. Podaj zwartą postać funkcji tworzących dla ciągów

(i) (`1 pkt`) $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$;
(ii) (`2 pkt`) $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$;
(iii) (`2 pkt`) $\left\{\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots\right\}$, gdzie m jest pewną ustaloną liczbą naturalną;
(iv) (`2 pkt`) $(ma_0 + (m-1)a_1 + \ldots + 2a_{m-1} + a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, gdzie $A(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadanie 2 (`4 pkt`)**.** Rozwiąż równanie rekurencyjne

$$a_0 = 1,$$
$$a_{n+1} - 2a_n = n3^n \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Zadanie 3 (`4 pkt`)**.** Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym podzbiorem poddrzew drzewa T. Pokaż, że jeśli każde dwa drzewa w $\mathcal{T}$ mają niepuste przecięcie (wierzchołkowo) to istnieje wierzchołek należący do wszystkich drzew w $\mathcal{T}$.

Zadanie 4 (`4 pkt`)**.** Pokaż, że każdy graf spójny G ma ścieżkę długości $\min\{2\delta(G), |G|-1\}$, gdzie $\delta(G)$ jest minimalnym stopniem wierzchołka w G.

Zadanie 5 (`4 pkt`)**.** Czy każdy graf cięciwowy jest przedziałowy? Czy każdy graf przedziałowy jest cięciwowy? Uzasadnij.

Zadanie 6 (`4 pkt`)**.** Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, każdy graf o minimalnym stopniu co najmniej $f(k)$ jest k-spójny?

Zadanie 7 (`4 pkt`)**.** Pokaż, że dla dowolnego grafu G następujące warunki są równoważne

(i) $\chi(G) \leqslant k$;
(ii) G ma acykliczną orientację krawędzi bez skierowanych ścieżek długości k;
(iii) (`1 pkt*`) G ma orientację krawędzi bez skierowanych ścieżek długości k.

Zadanie 8 (`4 pkt`)**.** Wykaż, że liczba rozszerzeń liniowych posetu P o n punktach jest ograniczona przez $\mathrm{width}(P)^n$.

Powodzenia.