

Kolokwium poprawkowe

Zadanie 1. Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n -elementowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.

Zadanie 2. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1},$$
$$\sum_{k=0}^m k \left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m+n+1 \\ m \end{matrix} \right\}.$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie rekurencyjne

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, dla $n \geq 2$, gdzie $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ jest funkcją Möbiusa.

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje poset P taki, że $\dim(P) \geq n$.

Powodzenia.