

Kolokwium 1

Zadanie 1. 100 osobowa grupa studentów ma możliwość uczęszczania na n kursów. Okazuje się, że dla każdej dwójki studentów istnieje kurs na który chodzi dokładnie jeden z nich. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość n ?

Zadanie 2. W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tym samym wierszu, w tej samej kolumnie i na tej samej przekątnej (mowa o dwu przekątnych kwadratu). Pokaż, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Zadanie 3. Na ile sposobów można posadzić n par wrogów w rzędzie krzeseł tak, by wrogowie nie siedzieli koło siebie (nie oczekujemy zwartej postaci)?

Zadanie 4.

- (i) Jaki jest współczynnik przy $x^{12}y^{13}$ w rozwinięciu $(x + 2y + 3)^{25}$?
- (ii) Przekształć do zwartej postaci $\sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k}$.
- (iii) $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}$.

Zadanie 5. Na ile sposobów można przejść z punktu $(0, 0)$ do punktu $(9n, n)$ jeśli w każdym ruchu możemy zmienić położenie o wektor $(2, 3)$ lub $(1, -2)$?

Zadanie 6. Zweryfikuj, czy dla dowolnego $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$. (Udowodnij lub wskaż kontrprzykład.)

Powodzenia.