Kolokwium 2

Zadanie 1 (`7 pkt`)**.** Znajdźć wzór na $n-$ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w sposób następujący:

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = n\ (n \geqslant 0).$$

Zadanie 2 (`6 pkt`)**.** Wykaż, że:

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k(k+1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}.$$

Zadanie 3 (`2 + 2 + 3 pkt`)**.** Podaj wzór na funkcję tworzącą dla następujących ciągów:

(i) $u_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} + na_n$, przy założeniu że $A(x)$ jest funkcją tworzącą dla ciągu a_n,

(ii) $u_n = (n+1)a_0 + na_1 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$, przy założeniu że $A(x)$ jest funkcją tworzącą dla ciągu a_n,

(iii) $u_n = e_n - o_n$, gdzie e_n $[o_n]$ to ilość podziałów liczby n na parzystą [nieparzystą] liczbę składników.

Zadanie 4 (`8 pkt`)**.** Niech G_k będzie grafem, którego wierzchołkami są wszystkie podzbiory $(k-1)$-elementowe zbioru $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$, zaś dwa wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentujące je zbiory mają puste przecięcie. Wykaż, że $\chi(G_k) = 3$ dla każdego $k \geqslant 2$.

Zadanie 5 (`4 + 4 pkt`)**.**

(i) Wykaż, że dla dowolnego grafu przedziałowego G zachodzi $\omega(G) = \chi(G) = \mathrm{col}(G)$;

(ii) Wykaż, że dla dowolnego grafu cięciwowego G zachodzi $\omega(G) = \chi(G) = \mathrm{col}(G)$.

Komentarz: ponieważ dla każdego grafu G zachodzi $\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \mathrm{col}(G)$ wystarczy pokazać $\mathrm{col}(G) \leqslant \omega(G)$.

Zadanie 6 (`1 pkt`)**.** Ile równa jest listowa liczba chromatyczna grafu $K_{2\star n}$, to jest pełnego grafu n-dzielnego w którym każda część zawiera dokładnie dwa wierzchołki?

Powodzenia.