Kolokwium 1

Zadanie 1 (`4+4 pkt`)**.** Podaj funkcję tworzącą oraz wyprowadź wzór na n-ty wyraz ciągu u_n określonego rekurencyjnie w sposób następujący:

$$u_0 = 2,\ u_1 = 5,\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2^{n+1}\ (n \geqslant 0).$$

Zadanie 2 (`4+4+4 pkt`)**.** Udowodnij tożsamości:

(i) $\left\{ {n \atop m} \right\} m! = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n$,

(ii) $\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[{k \atop m} \right] n^{\underline{n-k}}$,

(iii) $F_n + F_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} F_k 2^{n-2-k} = 2^n$, gdzie ciąg F_n zadany jest rekurencją

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1 \text{ oraz } F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Zadanie 3 (`4+6 pkt`)**.** Zakładając, że $A(x)$ oraz $B(x)$ są odpowiednio funkcją tworzącą oraz wykładniczą funkcją tworzącą dla ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, wskaż:

(i) funkcję tworzącą oraz wykładniczą funkcję tworzącą dla ciągu $a_n n^2$,

(ii) funkcję tworzącą bądź wykładniczą funkcję tworzącą dla ciągów:

- (i) $\sum_{i=0}^{n} i a_i$,
- (ii) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i$,
- (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1+\ldots+i_k=n,\ i_j>0} \quad a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$,
- (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1+\ldots+i_k=n,\ i_j>0} \quad \frac{n!}{i_1! \ldots i_k!}\, a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$.

Zadanie 4 (`5 pkt`)**.** Typem permutacji $\phi \in S_n$ nazywamy ciąg $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}]$, gdzie α_i jest liczbą cykli długości i w permutacji ϕ. Dla ustalonego ciągu liczb całkowitych nieujemnych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ znajdź liczbę permutacji w zbiorze S_n, które mają typ $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}]$.

Zadanie 5 (`3+3 pkt`)**.** Podaj funkcje tworzące dla następujących ciągów:

(i) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, gdzie a_n to liczba podziałów liczby n, w której składnik k występuje co najwyżej k razy,

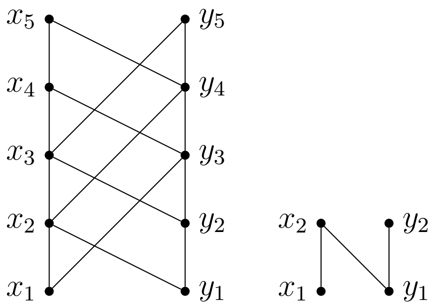
(ii) $\{e_n - o_n\}_{n=0}^{\infty}$, gdzie e_n oraz o_n to liczba podziałów n na odpowiednio parzystą i nieparzystą liczbę składników.

Zadanie 6 (5+5 pkt)**.** Rozszerzeniem liniowym posetu $(P, \leqslant)$ nazywamy liniowy porządek $(P, \leqslant_L)$ spełniający dla dowolnych $x, y \in P$ warunek:

$$\text{jeżeli } x \leqslant y \text{ w } (P, \leqslant) \text{ to } x \leqslant_L y \text{ w } (P, \leqslant_L).$$

Dla przykładu, poset P_2 ma pięć różnych liniowych rozszerzeń:

1. $x_1y_1x_2y_2$,
2. $x_1y_1y_2x_2$,
3. $y_1x_1x_2y_2$,
4. $y_1x_1y_2x_2$,
5. $y_1y_2x_1x_2$.



Rysunek 1: Posety P_5 i P_2.

(i) Znajdź liczbę liniowych rozszerzeń posetu P_n.

(ii) Podaj konstrukcję $2n$-punktowego posetu Q_n mającego C_n liniowych rozszerzeń, gdzie C_n jest n-tą liczbą Catalana.

Powodzenia.