Kolokwium 2

Zadanie 1 (`5+5 pkt`).

(i) Znajdź maksymalny przepływ w sieci przedstawionej na arkuszu Zadanie 1. Odpowiedź uzasadnij.

(ii) Czy prawdziwe jest następujące zdanie:

Jeżeli (S, T) jest przekrojem takim, że dla każdej krawędzi $(x, y) \in E \cap (S, T)$ istnieje przekrój o minimalnej przepustowości (S', T') taki, że $(x, y) \in (S', T')$, to (S, T) jest przekrojem minimalnym.

Zadanie 2 (`5+5 pkt`).

(i) Czy każdy graf dwudzielny 3-regularny ma dopasowanie doskonałe?

(ii) Czy każdy graf 3-regularny ma dopasowanie doskonałe?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3 (`5+5 pkt`). Znajdź najmniejsze k takie, że:

(i) liczba kolorująca dowolnego grafu zewnętrznie planarnego jest ograniczona od góry przez k,

(ii) liczba chromatyczna dowolnego grafu zewnętrznie planarnego jest ograniczona od góry przez k.

Odpowiedź uzasadnij.

Graf jest zewnętrznie planarny jeżeli jego wierzchołki możemy odwzorować na punkty okręgu, zaś krawędzie na jego cięciwy tak, by żadne dwie nie przecinały się we wnętrzu okręgu.

Zadanie 4 (`5 pkt`). Niech $m_k m_{k-1} \dots m_1 m_0$ będzie zapisem dziesiętnym liczby M. Wykaż, że:

$$11|M \Leftrightarrow 11|(m_0 + m_2 + \dots m_p) - (m_1 + m_3 + \dots + m_n),$$

gdzie p [n] jest największą liczbą parzystą [nieparzystą] mniejszą bądź równą k.

Zadanie 5 (`7 pkt`). Udowodnij, że dla dowolnych funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\forall_{n \in N}\ f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Rightarrow \quad \forall_{n \in N}\ g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}).$$

Zadanie 6 (`8 pkt`). Niech $[a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową $n \times n$ taką, że: $a_{i,j} \geqslant 0$, elementy każdej kolumny sumują się do 1, i elementy każdego wiersza sumują się do 1. Wykaż, że istnieje permutacja $\delta \in S_n$ taka, że $a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \dots a_{n\delta n} > 0$.

Powodzenia.