

## Kollokwium poprawkowe

**Zadanie 1** (5+5 pkt). Podaj funkcję tworzącą i zwartą formę dla ciągu rekurencyjnego zadanego w następujący sposób:

$$u_0 = 2, u_1 = 4, u_2 = 11, u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0 \text{ dla } n \geq 0.$$

**Zadanie 2** (7 pkt). Niech  $(S_1, T_1), (S_2, T_2)$  będą dwoma przekrojami minimalnymi sieci przepływowej  $N$ . Czy  $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$  jest przekrojem minimalnym w  $N$ ? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 3** (2+5 pkt). Podaj i udowodnij zasadę włączeń i wyłączeń.

**Zadanie 4** (3+3 pkt). Permutacje  $\alpha, \beta \in S_n$  są *sprzężone* jeżeli istnieje permutacja  $\pi \in S_n$  taka, że  $\alpha = \pi \circ \beta \circ \pi^{-1}$ .

Wykaż, że  $\alpha$  oraz  $\beta$  są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha$  oraz  $\beta$  mają tyle samo cykli długości  $k$ .

**Zadanie 5** (2.5+2.5+2.5+2.5 pkt). Kostką  $n$ -wymiarową  $Q_n$  nazywamy graf, którego wierzchołkami są słowa długości  $n$  nad alfabetem  $\{0, 1\}$ , zaś krawędzie łączą tylko wierzchołki odpowiadające słowom różniącym się na jednej pozycji. Dla każdego  $n$  zbadaj prawdziwość nasępujących zdań:

- (i)  $Q_n$  ma cykl Hamiltona,
- (ii)  $Q_n$  ma cykl Eulera,
- (iii)  $Q_n$  jest grafem dwudzielnym,
- (iv) liczba kolorująca  $Q_n$  jest ograniczona przez  $n$ .

**Zadanie 6** (5 pkt). Udowodnij, że dla każdego  $k < n$  zachodzi tożsamość:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0 < i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} \dots \binom{i_1}{i_0}.$$

**Zadanie 7** (5 pkt). Niech  $G = (X, Y, E)$  będzie grafem dwudzielnym,  $|X| = |Y|$ . Niech  $d = \max\{|A| - |J(A)| : A \subseteq X\}$  (przyjmujemy, że  $J(\emptyset) = 0$ , wobec tego  $d \geq 0$ ). Wykaż, że najliczniejsze dopasowanie w  $(X, Y, E)$  ma moc  $n - d$ .

*Powodzenia.*