

Powodzenia!!!

Zadanie 1 (10p). Niech e_n oraz o_n będzie liczbą podziałów liczby n na parzystą oraz nieparzystą liczbę składników, odpowiednio, oraz niech $a_n = e_n - o_n$ (przyjmujemy, $a_n = 1$). Dodatkowo, przez b_n oznaczmy liczbę podziałów n na składniki parami różne. Wykaż, że dla każdego $n > 0$ prawdziwa jest równość:

$$\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = 0.$$

Zadanie 2 (10p). Podaj wzór na n -ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$* u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = n \quad (n \geq 0).$$

Zadanie 3. Na ile sposobów można:

- (3p) wybrać ze zbioru $\{0, 1, \dots, nk - 1\}$ podzbiór liczb, spośród których suma żadnych dwóch nie jest podzielna przez k ?
- (3p) wybrać ze zbioru $\{0, 1, \dots, nk - 1\}$ podzbiór liczb, spośród których różnica żadnych dwóch nie jest podzielna przez k ?
- (3p) wybrać ze zbioru $\{0, 1, \dots, nk - 1\}$ podzbiór liczb, spośród których różnica żadnych dwóch nie równa się k ?
- (3p) połamać patyk długości n na patyczki długości 1 zakładając, że w każdym kroku łamiemy dokładnie jeden patyk?
- (3p) połamać patyk długości n na patyczki długości 1 zakładając, że w każdym kroku łamiemy wszystkie patyczki, których długość jest większa bądź równa 2?

Zadanie 4 (10). Pokaż, że dla $n \geq 0$ zachodzi

$$x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$