Powodzenia!!!

Zadanie 1 (10p)**.** Opisz, jak rozwiązać problem znajdowania minimalnego zbioru rozspójniającego (minimalnego pod względem liczności zbioru wierzchołków, którego usunięcie powoduje rozpadnięcie się grafu na co najmniej 2 składowe spójne) poprzez wielomianową redukcję tego problemu do problemu maksymalnego przepływu w sieci.

Zadanie 2 (10p)**.** Wypowiedz i udowodnij chińskie twierdzenie o resztach.

Zadanie 3 (6p+6p)**.** Graf G jest $z$ewnętrznie planarny jeżeli jego wierzchołki możemy umieścić na okręgu w taki sposób, że żadne dwie krawędzie rysowane jako odcinki nie przecinają się wewnątrz tego okręgu.

- ∗ Czy każdy graf zewnętrznie planarny jest 3-kolorowalny?
- ∗ Czy wierzchołki każdego grafu zewnętrznie planarnego można ustawić w porządek liniowy tak, że każdy wierzchołek ma co najwyżej 2 sąsiadów poprzedzających go w tym porządku?

Zadanie 4 (7p+7p)**.** Macierz M rozmiaru $n \times n$ nazywamy *kwadratem łacińskim* jeżeli każdy wiersz i każda kolumna macierzy zawiera pewną permutację liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Niech $n_1, n_2 \leqslant n$ będą dwoma liczbami naturalnymi. Niech M będzie macierzą $n_1 \times n_2$, której wszystkie pola $M[i][j]$, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $1 \leqslant j \leqslant n_2$, są wypełnione pewnymi liczbami ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ (wszystkie częściowo wypełnione wiersze i kolumny zawierają różne liczby). Znajdź warunek konieczny i wystarczający na to, by:

(i) Wykaż, że jeżeli $n_1 = n$ oraz $n_2 < n$, to M jest zawsze rozszerzalna do kwadratu łacińskiego,

(ii) Wykaż, że jeżeli $n_1 < n$ oraz $n_2 < n$, to M jest rozszerzalne do kwadratu łacińskiego wtedy i tylko wtedy, gdy kazdy element w M występuje co najmniej $n_1 + n_2 - n$ razy.