Kolokwium 1

Zadanie 1 (6.5 punktu)**.** Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $n, k \geqslant 1$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla dowolnego k-kolorowania liczb ze zbioru $\{1, \ldots, N\}$ istnieją liczby a oraz r takie, że

$$a,\ a+r,\ a+2r, \ldots,\ a+(m-1)r \text{ oraz } r$$

mają ten sam kolor.

Zadanie 2 (6 punktów)**.** Rozważ P_n — zbiór $2n$ różnych punktów na okręgu. Na ile sposobów możesz połączyć punkty z P_n w pary rysując n rozłącznych odcinków tak, że każdy punkt w P_n jest końcem jednego odcinka? Niech s_n będzie szukaną liczbą dla ustalonego $n \geqslant 0$. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(s_n)_{n \geqslant 0}$ oraz wzór zwarty na s_n.

Zadanie 3 (6.5 punktu)**.** Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{m}{k} 2^k.$$

Zadanie 4 (6.5 punktu)**.** Niech $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, gdzie X jest zbiorem n-elementowym oraz $\mathcal{F}$ nie zawiera $k+1$ elementów $Y_0, \ldots, Y_k$ takich, że $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_k$. Udowodnij, że

$$|\mathcal{F}| \leqslant S,$$

gdzie S jest sumą k największych współczynników spośród $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

Zadanie 5 (6 punktów)**.** Mamy $2n$ elfów i n goblinów. Elfy są piękne i każdy inny. Gobliny są brzydkie i wszystkie takie same. Ustawiamy całe towarzystwo w ciąg $3n$-elementowy. Gobliny czują się nieswojo w otoczeniu elfów, a zatem każdy goblin musi mieć choć jednego krajana za sąsiada. Na ile sposobów można ustawić to towarzystwo?

Zadanie 6 (6 punktów)**.** Dla każdego ustalonego $k \geqslant 0$ niech $f(n,k)$ będzie liczbą podzbiorów k-elementowych zbioru $\{1, \ldots, n\}$, które nie zawierają dwu kolejnych liczb. Wykaż, że

$$f(n,k) = f(n-2, k-1) + f(n-1, k).$$

Dla usalonego k niech $F_k(x)$ będzie funkcją tworzącą dla ciągu $f(n,k)$. Znajdź zależność rekurencyjną na $F_k(x)$ i wywnioskuj z niej, że

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

Powodzenia!