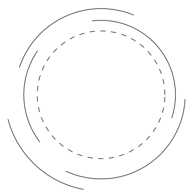
Kolokwium 2

Zadanie 1. Wykaż, że dowolny graf G zawiera podgraf H o minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(H) \geqslant \chi(G) - 1$.

Zadanie 2. G jest *grafem przecięć łuków*, jeśli istnieje funkcja r przypisująca wierzchołkom G łuki na okręgu w taki sposób, że u i v sąsiadują w G wtedy i tylko wtedy, gdy łuki $r(u)$ i $r(v)$ się przecinają. Czy liczba chromatyczna jest ograniczona względem liczby kli-



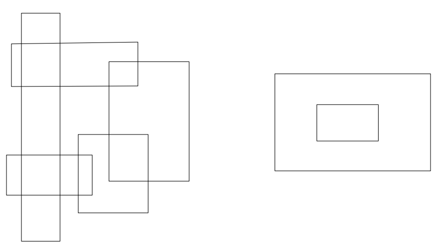
Rysunek 1: Reprezentacja cyklu C_5 jako grafu przecięć łuków na okręgu.

kowej dla grafów przecięć łuków na okręgu? Negatywną odpowiedź poprzyj konkstrukcją, a pozytywną dowodem ograniczenia.

Zadanie 3. Niech G będzie grafem taki, że $\chi(G) > k$. Niech X i Y będzie podziałem wierzchołków G taki, że $\chi(G[X]) = k$ i $\chi(G[Y]) = k$. Wykaż, że G zawiera co najmniej k krawędzi pomiędzy X i Y.

Zadanie 4. Tablica M rozmiaru $n \times n$ wypełniona jest liczbami rzeczywistymi z przedziału $[0,1]$ w taki sposób, że suma elementów w każdym wierszu M oraz suma elementów w każdej kolumnie M równa jest 1. Wykaż, że istnieje permutacja π zbioru $\{1,\ldots,n\}$ taka, że dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$ zachodzi $M[i,\pi(i)] \neq 0$.

Zadanie 5. G jest *grafem przecięć ramek* jeśli istnieje funkcja r przypisująca wierzchołkom G ramkę (czyli brzeg prostokąta o bokach równoległych do ustalonych osi). Wykaż, że dla dowolnego n istnieje G_n graf przecięć ramek taki, że $\omega(G_n) = 2$ i $\chi(G_n) > n$. Uwaga: graf przecięć ramek nie jest grafem przecięć odpowiadających im prostokątów. Patrz poniżej.



Rysunek 2: Po lewej: Reprezentacja cyklu C_5 jako grafu przecięć ramek. Po prawej: Dwie nieprzecinające się ramki o przecinających się odpowiadającym im prostokątom.

Zadanie 6. Niech G będzie grafem i $\ell \geqslant 2$. Wykaż, że jeżeli w G nie zawiera, jako podgrafu, cyklu o długości 1 mod ℓ, to $\chi(G) \leqslant \ell$.

Zadanie 7. Każda krawędź kliki K_n pokolorowana jest na czerwono lub niebiesko. Wykaż, że w grafie tym istnieje czerwona lub niebieska ścieżka na co najmniej $\lceil n/2 \rceil$ wierzchołkach.

Powodzenia!