

Lista pytań egzaminacyjnych

Pytanie 1. Współczynniki dwumianowe, liczby Stirlinga. Podstawowe tożsamości, wzory rekurencyjne, interpretacje. Na ile sposobów możemy włożyć n obiektów do k szuflad (12 wariantów)?

Pytanie 2. Liczby Stirlinga. Podstawowe tożsamości, wzory rekurencyjne, interpretacje. Zasada włączeń i wyłączeń.

Pytanie 3. Liczby Catalana. Wyprowadzenie zwartej postaci. Zliczanie: słów Dycka, triangulacji wielokąta wypukłego, drzew binarnych, pełnych drzew binarnych, drzew narysowanych, nawiasowań ciągu symboli.

Pytanie 4. Algorytm Euklidesa. Tożsamość Bézouta. Fundamentalne twierdzenie arytmetyki. Chińskie twierdzenie o resztach. Funkcja Eulera i twierdzenie Eulera. Małe twierdzenie Fermata. Multiplikatywność funkcji Eulera i jej konsekwencje.

Pytanie 5. Funkcje tworzące. Definicja. Rozwinięcie w szereg podstawowych funkcji takich jak: $\frac{1}{(1-ax^k)^m}$. Jeśli $A(x)$ jest tworzącą ciągu $(a)_{n \in \mathbb{N}}$, wyprowadzić funkcje tworzące ciągów: $(0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)$, $(a_k, a_{k+1}, \dots)$, $(\sum_{n=0}^k a_n)_{k \in \mathbb{N}}$. Uogólnione współczynniki dwumianowe. Funkcja tworzącą ciągu Fibonacciego i wyprowadzenie z niej wzoru zwanego na liczby Fibonacciego.

Pytanie 6. Twierdzenie o wielomianie charakterystycznym ciągu zadanego rekurencyjnie. Przykładowa aplikacja. Twierdzenie o funkcji rzeczywistej odpowiadającej funkcji tworzącej i przykład zastosowania. Funkcja tworzącą liczb Catalana i wyprowadzenie z niej wzoru zwanego na liczby Catalana.

Pytanie 7. Funkcja tworząca liczb drzew 3-arnych i wyprowadzenie zwanego wzoru na te liczby.

Pytanie 8. Twierdzenie Eulera o funkcji tworzącej dla $p(n)$. Twierdzenie Eulera o równości pomiędzy liczbą podziałów n na składniki nieparzyste, a liczbą podziałów n na różne składniki.

Pytanie 9. Wzór rekurencyjny na $p(n)$ umożliwiający obliczenie $p(n)$ w czasie $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$. Twierdzenie Eulera o liczbach pięciokątnych. Twierdzenie Ramanujana.

Pytanie 10. Posety. Twierdzenie dualne do twierdzenia Dilwortha. Lemat Erdősa-Szekeresa. Twierdzenie Dilwortha. Krata boolowska. Twierdzenie Spernera. Nierówność Lubella–Yamamoto–Meshalkina.

Pytanie 11. Dowód twierdzenia Spernera przez podział kraty na łańcuchy symetryczne. Rekurencyjna konstrukcja takiego podziału i konstrukcja wprost przez nawiasowania. Liczby Dedekinda. Ograniczenie górne na liczby Dedekinda: $\mathcal{O}\left(3^{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$.

Pytanie 12. Cienie zbiorów w kracie boolowskiej. Dowód twierdzenia Spernera przy pomocy cieni zbiorów. Twierdzenie Erdősa–Ko–Rado.

Pytanie 13. k -kaskadowa reprezentacja liczb naturalnych. Dowód istnienia unikalnej reprezentacji. Twierdzenie Lovász. Twierdzenie Kruskala–Katony bez dowodu.

Pytanie 14 (*). Dowód twierdzenia twierdzenia Kruskala–Katony.

Pytanie 15. Twierdzenie Ramsey. Ograniczenie dolne na liczby Ramsey (twierdzenie Erdősa). Ograniczenie górne na liczby $R(s, t)$ (twierdzenie Erdősa–Szekeres).

Pytanie 16. Twierdzenie Schura. Problem o szczęśliwym zakończeniu i twierdzenie Erdősa–Szekeres. Twierdzenie Halesa–Jewetta (bez dowodu) i wyprowadzenie z niego twierdzenia van der Waerdena.

Pytanie 17 (*). Dowód twierdzenia Halesa–Jewetta.

Pytanie 18. Cykl Eulera oraz warunek konieczny i wystarczający dla grafu na zawieranie cyklu Eulera. Twierdzenie Diraca, czyli warunek wystarczający dla grafu na posiadanie cyklu Hamiltona. Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe vs. największe skojarzenie. Grafy dwudzielnie: charakteryzacja, twierdzenie Königa.

Pytanie 19. Twierdzenie Halla. Twierdzenie Tutte’a o warunku równoważnym na istnienie doskonałego skojarzenia w grafie.

Pytanie 20. Twierdzenie Menger. Sieci przepływowe i przepływy. Twierdzenie Forda–Fulkersona.

Pytanie 21. Liczba kolorująca grafu i wielomianowy algorytm jej wyznaczania. Twierdzenie Brooksa.

Pytanie 22. Konstrukcje grafów bez trójkątów o dowolnie dużej liczbie chroaticznej. Konstrukcja Zyкова, konstrukcja Tutte’a, grafy przesunięciowe (shift graphs)

Pytanie 23. Grafy doskonałe: grafy porównywalności i grafy nieporównywalności, kografy. Kografy vs. grafy P_4 -wolne. Wypowiedzi Strong (i Weak) Perfect Graph Theorem.

Pytanie 24. χ -ograniczone klasy grafów. Twierdzenie Gyárfása o grafach bez długiej ścieżki jako podgrafu indukowanego. Grafy przecięć prostokątów na płaszczyźnie o bokach równoległych do osi.

Pytanie 25. Planarność. Twierdzenie Jordana dla wielokątów. Grafy płaskie. Formuła Eulera i lematy ją poprzedzające. Wykaż, że K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.

Pytanie 26. Kolorowanie grafów planarnych: Minimalny stopień ≤ 5 . Dowód 5-kolorowalności przez łańcuchy Kempego. Twierdzenie o czterech barwach (wypowiedź i trochę historii). Uogólnienia i pokrewne twierdzenia.

Pytanie 27. Kolorowania z list. Twierdzenie Thomassena o listowej liczbie chromatycznej grafów planarnych.

Pytanie 28. Twierdzenie Turána. Twierdzenie Erdősa-Stone'a (bez dowodu) i jego zastosowanie dla obliczenia $\lim ex(n, H) \cdot \binom{n}{2}^{-1}$.

Pytanie 29. Minor w grafie. Twierdzenie Wagnera-Kuratowskiego bez dowodu. Hipoteza Hadwigera. Wykaż, że średni stopień $\geq 2^{r-2}$ wymusza minor K_r w grafie.

Pytanie 30. Twierdzenie Thomassena o tym, że minimalny stopień ≥ 3 i duża talia wymusza minor K_r w grafie.