Kolokwium I

Zadanie 1 (`3 pkt`)**.** Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ i $s \in \mathbb{N}_1$, symbolem $\binom{n}{k}_s$ oznaczamy liczbę wszystkich k-elementowych multizbiorów z elementami w $[n]$, gdzie każdy element występuje co najwyżej s razy. Udowodnij, że

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^{s} \binom{n-1}{k-j}_s.$$

Zadanie 2. Niech $n \in \mathbb{N}_3$. Przekształć do jak najprostszej postaci:

(i) (`1 pkt`) $\sum_{k=0}^{n} (-3)^k \binom{n}{k}$,

(ii) (`1 pkt`) $\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$,

(iii) (`1,5 pkt`) $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} 5^k$.

Zadanie 3 (`3 pkt`)**.** Na ile sposób można podzielić liczbę $n \in \mathbb{N}_1$ na składniki dodatnie nieparzyste, gdzie kolejność składników ma znaczenie. Na przykład, dla liczby 5 odpowiedź wynosi 5: $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5)$.

Zadanie 4 (`4 pkt`)**.** Udowodnij, że dla każdego $y, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{d=0}^{y} \binom{m+y}{y-d} \left(\!\binom{m}{d}\!\right) (-1)^d = 1.$$

Zadanie 5 (`3 pkt`)**.** Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Ile jest ciągów liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ takich, że $a_1 = 0$ oraz $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$? Na przykład, takich ciągów długości 3 jest 5: 000, 001, 010, 011 i 012.

Zadanie 6 (`3 pkt`)**.** Niech $\mathcal{D}_n$ będzie rodziną wszystkich ścieżek Dycka długości $2n$. Dla danej ścieżki Dycka $x \in \{-1, 1\}^{2n}$ niech $m_x = |\{i \in \{0, 1, \ldots, 2n\} \mid \sum_{j=0}^{i} x_j = 0\}|$. Zatem m_x to liczba przecięć wykresu x z osią OX, patrz rysunek 1. Dla $n \in \mathbb{N}_1$, oblicz $\sum_{x \in \mathcal{D}_{n-1}} m_x$.

Zadanie 7.

(i) (`1 pkt`) Znajdź wszystkie rozwiązania równania $231x + 39y = 15$ w liczbach całkowitych.

(ii) (`1 pkt`) Czy istnieje $x \in \mathbb{Z}$ taki, że $7x^2 + 12x + 1 \equiv 0 \mod 131$?

(iii) (`1,5 pkt`) Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych układu $\begin{cases} 5x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 6 \\ x \equiv 8 \mod 11 \end{cases}$.

Zadanie 8 (`3 pkt`)**.** Niech $p, k \in \mathbb{N}$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą i $1 < k < p$. Udowodnij, że $\left\{ p \atop k \right\} \equiv 0 \bmod p$. A ile jest równe $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} \bmod p$?

Zadanie 9 (`3 pkt`)**.** Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą taką, że $p \equiv 3 \bmod 4$ to nie istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $p \mid n^2 + 1$.

Zadanie 10 (`4 pkt`)**.** Ile jest ciągów długości n nad zbiorem symboli $\{A, B, C, D\}$ takich, że A występuje nieparzyście wiele razy i B występuje nieparzyście wiele razy? Na przykład takich ciągów długości 3 jest 12: ABC, ABD, BAC, BAD, ACB, ADB, BCA, BDA, CAB, DAB, CBA, ADB.

Zadanie 11.

(i) (`2 pkt`) Niech $a_0 = 0$, $a_1 = 4$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2^n(n+1).$$

Wyznacz zwarty wzór na a_n.

(ii) (`1 pkt`) Niech $b_0 = b_1 = 0$, $b_2 = b_3 = 1$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$b_{n+4} = 2b_{n+3} - b_{n+1} + b_n.$$

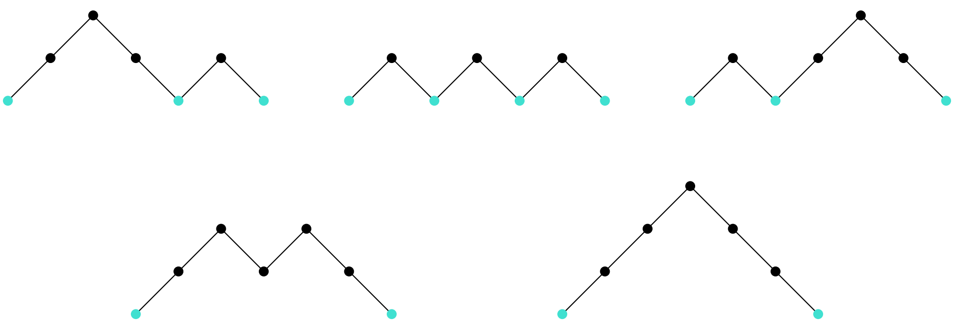
Wyznacz zwarty wzór na funkcję tworzącą ciągu $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

(iii) (`1 pkt`) Znajdź zwartą postać funkcji tworzącej ciągu

$$(1, 2, 3, 4, 9, 6, 27, 8, 81, 10, \ldots, 2k, 3^k, 2(k+1), 3^{k+1}, \ldots).$$

Zadanie 12 (`3 pkt`)**.** Dla $n \in \mathbb{N}_1$ wyznacz zwarty wzór na

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n,\ k_i>0} F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdots F_{k_m}.$$



Rysunek 1: Wartość dla $n = 4$ to 14.

Powodzenia.