Kolokwium II

Zadanie 1 (`3 pkt`)**.** Niech $k, n \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 2k$. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną k-elementowych podzbiorów $[n]$, taką że $F_1 \cup F_2 \subsetneq [n]$ dla dowolnych $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Wykaż, że $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k}$ oraz dla wszystkich $k, n \in \mathbb{N}$ takich że $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 2k$ wskaż rodzinę $\mathcal{F}_{n,k}$ spełniającą założenia taką, że $|\mathcal{F}_{n,k}| = \binom{n-1}{k}$.

Zadanie 2 (`3 pkt`)**.** Wykaż, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}_1$ takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [N]$ takie, że $c(x_1) = c(x_2) = c(x_3) = c(x_4)$ oraz

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2x_4.$$

Zadanie 3 (`3 pkt`)**.** Wykaż, że dla dowolnych $m, k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}_1$ takie, że dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ i dla każdego kolorowania $c : A \to [k]$, jeśli A zawiera ciąg arytmetyczny długości N, to A zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości m.

Zadanie 4. Niech $k \in \mathbb{N}_1$. Graf G jest *k-spójny* jeśli $|V(G)| > k$ oraz dla dowolnego $V \subseteq V(G)$, gdzie $|V| \leqslant k - 1$, graf $G - V$ jest spójny. Graf G jest *krawędziowo k-spójny* jeśli $|V(G)| > 1$ oraz dla dowolnego $E \subseteq E(G)$, gdzie $|E| \leqslant k - 1$, graf $G - E$ jest spójny.

(i) (`1 pkt`) Czy graf spójny mający więcej niż jeden wierzchołek w którym każdy wierzchołek ma parzysty stopień jest krawędziowo 2-spójny? Odpowiedź uzasadnij.

(ii) (`2 pkt`) Niech G będzie k-spójnym grafem i niech G' będzie uzyskany z G poprzez dodanie nowego wierzchołka sąsiadującego z co najmniej k wierzchołkami G. Czy G' jest zawsze k-spójny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5 (`4 pkt`)**.** Niech $n \in \mathbb{N}_1$ i niech G będzie n-wierzchołkowym grafem. Wykaż, że jeśli każdy wierzchołek w grafie ma stopień co najmniej $(n + 1)/2$, to dla każdej krawędzi e w G istnieje cykl Hamiltona w G zawierający e.

Zadanie 6 (`3 pkt`)**.** Klasyczna talia kart składa się z 52 kart. Każda karta ma jeden z czterech kolorów: pik, kier, karo i trefl oraz jedną z wartości: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$. Podzielono talię kart na 13 stosów po 4 karty. Udowodnij, że niezależnie od podziału, da się wybrać z każdego stosu po jednej karcie (otrzymując 13 kart) tak aby wartości otrzymanych kart były parami różne (czyli innymi słowy aby otrzymać po jednej karcie w każdej wartości).

Zadanie 7 (`4 pkt`)**.** Dla grafu G i $w \in V(G)$ oznaczamy $N_G(w) = \{x \in V(G) \mid wx \in E(G)\}$ i $N_G[w] = N_G(w) \cup \{w\}$. Udowodnij, że graf G jest kografem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podgrafu indukowanego H grafu G, który zawiera co najmniej dwa wierzchołki istnieją dwa różne wierzchołki $u, v \in V(H)$, takie że $N_H(u) = N_H(v)$ lub $N_H[u] = N_H[v]$.

Zadanie 8 (`4 pkt`)**.** *Drzewiastość* grafu G, oznaczana $\operatorname{arb}(G)$, to najmniejsza liczba $k \in \mathbb{N}$, taka że $E(G)$ może być podzielone na k zbiorów $E_1, \ldots, E_k$ takich, że graf $(V(G), E_i)$ jest lasem dla każdego $i \in [k]$. Udowodnij, że dla każdego grafu G z co najmniej jedną krawędzią zachodzi

$$\operatorname{arb}(G) \leqslant \operatorname{col}(G) - 1 \leqslant 2 \cdot \operatorname{arb}(G) - 1.$$

Zadanie 9 (`3 pkt`)**.** Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Udowodnij, że dla każdego n-wierzchołkowego grafu G mamy $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n$.

Zadanie 10 (`3 pkt`)**.** Rozważmy rodzinę grafów, których wierzchołkami są trójkąty równoboczne narysowane na płaszczyźnie, których podstawy są równoległe do osi poziomej. Dwa trójkaty łączy krawędź jeśli się niepusto przecinają (rozważamy wypełnione trójkąty). Udowodnij, że istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdego grafu G z rozważanej rodziny mamy $\chi(G) \leqslant f(\omega(G))$.

Zadanie 11 (`3 pkt`)**.** Rozważ graf G skonstruowany w następujący sposób. Niech $V(G) = [2024] \times [2024] \times [2]$. Dwa wierzchołki $(x, y, z), (x', y', z') \in V(G)$ są połączone krawędzią jeśli $|x - x'| = 1, y = y', z = z'$ lub $x = x', |y - y'| = 1, z = z'$ lub $x = x', y = y', z \neq z'$. Czy graf G jest planarny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12 (`4 pkt`)**.** Udowodnij, że każdy graf planarny bez trójkątów jest 4-kolorowalny.

Powodzenia.