

Kolokwium I

Zadanie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Przekształć do jak najprostszej postaci:

- (i) (1 pkt) $\sum_{k=0}^n (-5)^{k+2} \binom{n}{k}$,
- (ii) (1 pkt) $\sum_{k=0}^n (-3)^k \binom{n+1}{k}$,
- (iii) (1 pkt) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$.

Zadanie 2. Niech $n, k \in \mathbb{N}_1$. Dany jest stół mający n ponumerowanych miejsc oraz k wielkanocnych zająców. Zające chcą zająć miejsca przy stole, ale nie lubią się nawzajem, więc między każdymi dwoma muszą być co najmniej dwa miejsca wolne. Na ile sposobów zające mogą zająć miejsca przy stole

- (i) (1,5 pkt) jeśli stół jest prostokątny i zające siadają tylko po jednej jego stronie?
- (ii) (1,5 pkt) jeśli stół jest okrągły?

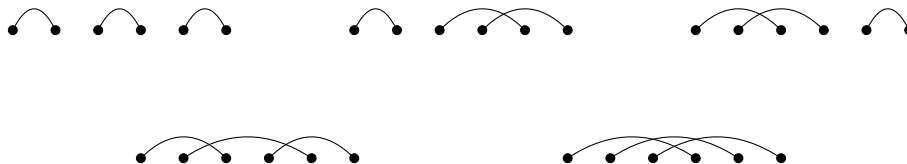
Zadanie 3 (3 pkt). Dla danego ciągu liczb, *segmentem* nazywamy maksymalny na inkuzję podciąg stały. Ile jest ciągów binarnych długości $n \in \mathbb{N}_1$ bez segmentów parzystej długości?

Zadanie 4 (4 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}_1$ i $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba permutacji σ zbioru $[n]$, które mają dokładnie k indeksów j takich, że $\sigma(i) < \sigma(j)$ dla każdego $i \in [j-1]$ wynosi $\binom{n}{k}$.

Zadanie 5 (4 pkt). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ pokaż, że

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Zadanie 6 (4 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozważ $2n$ punktów ustawionych kolejno na osi liczbowej. Para liczb (a, b) zawiera się w parze (c, d) jeśli $a < c < d < b$. Na ile sposobów można połączyć te punkty w pary tak, aby żadna para nie zawierała się w innej. Na rysunku poniżej widzimy, że wartość dla $n = 3$ to 5.



Zadanie 7.

- (i) (1 pkt) Oblicz $2025^{1601} \bmod 704$.
- (ii) (1 pkt) Czy istnieje $x \in \mathbb{Z}$ taki, że $3x^2 - 12x \equiv -1 \pmod{277}$?
- (iii) (1 pkt) Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania $103x - 77y = 1$.

Zadanie 8 (4 pkt). Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $a, b, r, s \in \mathbb{N}$ będą takie, że $b \leq a$, $0 \leq s \leq r < p$. Udowodnij, że

$$\binom{ap+r}{bp+s} \equiv \binom{a}{b} \binom{r}{s} \pmod{p}.$$

Zadanie 9.

- (i) (2 pkt) Niech $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 3^n.$$

Wyznacz zwarty wzór na a_n .

- (ii) (1 pkt) Niech $b_0 = 5$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b_k + 1) \cdot b_{n-k}.$$

Wyznacz zwarty wzór na funkcję tworzącą ciąg $(b_n)_{n=0}^\infty$.

- (iii) (1 pkt) Znajdź zwartą postać funkcji tworzącej ciąg $\left(\frac{1}{2n+1} \binom{4n}{2n}\right)_{n=0}^\infty$.

Zadanie 10 (4 pkt). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, oblicz

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n, k_i>0} \prod_{i=1}^m (2^{k_i-1} - 1).$$

Zadanie 11. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Udowodnij, że

- (i) (2 pkt) $p(n \mid \text{każdy składnik pomiędzy 1 a największym występuje})$
 $= p(n \mid \text{składniki parami różne}),$
- (ii) (2 pkt) $p(n \mid \text{składnik } i \text{ występuje mniej niż } i \text{ razy})$
 $= p(n \mid \text{żaden składnik nie jest kwadratem liczby całkowitej}).$

Powodzenia.