

Kolokwium II

Zadanie 1 (3 pkt). Niech $n, k \in \mathbb{N}_1$, $n \geq 2k$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną co najwyżej k elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$ i $A \not\subseteq B$. Udowodnij, że $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Zadanie 2 (3 pkt). Niech $x_1 + x_2 = x_3$ będzie równaniem *czerwonym*, a $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$ będzie równaniem *niebieskim*. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego kolorowania elementów zbioru $[N]$ na czerwono i niebiesko istnieje czerwone rozwiązanie równania czerwonego lub niebieskie rozwiązanie równania niebieskiego.

Zadanie 3 (3 pkt). Wykaż, że dla każdego $s \in \mathbb{N}_1$ istnieje $t \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego grafu G , jeśli G zawiera $K_{t,t}$ jako podgraf, to G zawiera K_s lub $K_{s,s}$ jako podgraf indukowany.

Zadanie 4 (3 pkt). Niech G będzie grafem dwudzielnym i niech $V(G) = A \cup B$ będzie podziałem wierzchołków świadczącym dwudzielność. Mówimy, że skojarzenie M w grafie G *pokrywa* zbiór $X \subseteq V(G)$, jeśli każdy wierzchołek w X jest końcem pewnej krawędzi w M . Niech $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Niech M będzie skojarzeniem w G pokrywającym X i niech N będzie skojarzeniem w G pokrywającym Y . Udowodnij, że istnieje skojarzenie w G , które pokrywa $X \cup Y$.

Zadanie 5 (3 pkt). Niech $m, n \in \mathbb{N}_1$. Rozważ dwa podziały zbioru $[mn]$ na m zbiorów $A_1, \dots, A_m$ oraz $B_1, \dots, B_m$, gdzie każdy element podziałów jest n -elementowy. Wykaż, że istnieje permutacja $\sigma : [m] \rightarrow [m]$ taka, że $A_{\sigma(i)} \cap B_i \neq \emptyset$ dla każdego $i \in [m]$.

Zadanie 6 (3 pkt). Dla grafu H , przez $c(H)$ oznaczamy liczbę spójnych składowych H . Niech G będzie grafem i niech S będzie niepustym podzbiorem wierzchołków G . Wykaż, że jeśli $c(G - S) > |S|$, to G nie ma cyklu Hamiltona.

Zadanie 7 (3 pkt). Cykl w grafie nazywamy *najdłuższym*, jeśli graf nie zawiera dłuższych cykli. Wykaż, że w dowolnym 2-spójnym grafie każde dwa najdłuższe cykle mają co najmniej dwa wspólne wierzchołki.

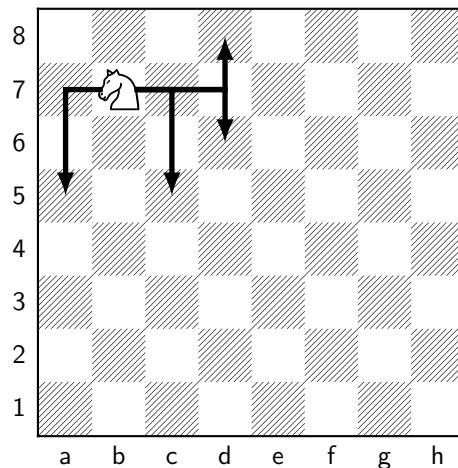
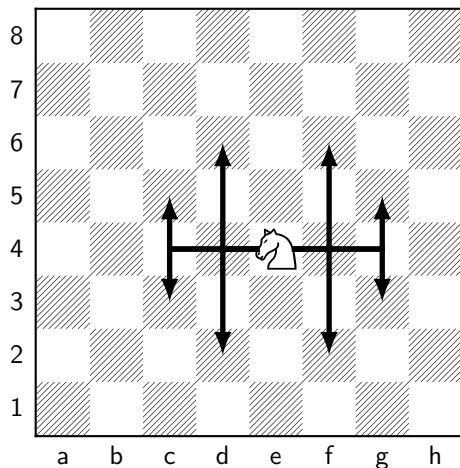
Zadanie 8 (3 pkt). Udowodnij, że graf G jest kografem wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie dowolnego spójnego podgrafu indukowanego G na co najmniej dwóch wierzchołkach nie jest spójne.

Zadanie 9 (3 pkt). Udowodnij, że każdy graf G zawiera podgraf H taki, że $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.

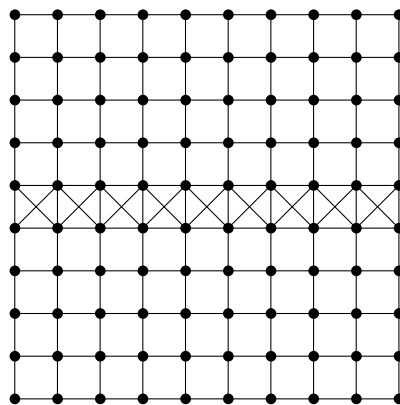
Zadanie 10 (3 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}_1$ i niech G będzie n -wierzchołkowym grafem. Wykaż, że G zawiera co najwyżej $n/2025$ wierzchołków stopnia co najmniej $4050(\chi(G) - 1)$.

Zadanie 11 (3 pkt). Rozważmy rodzinę grafów, których wierzchołkami są sześciiany w trójwymiarowej przestrzeni, których krawędzie są równoległe do osi układu współrzędnych. Dwa sześciiany łączy krawędź, jeśli się niepusto przecinają (rozważamy wypełnione sześciiany). Udowodnij, że istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że dla każdego grafu G z rozważanej rodziny mamy $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

Zadanie 12 (3 pkt). Rozważ graf, którego wierzchołkami są pola klasycznej szachownicy 8×8 . Dwa pola są połączone krawędzią, jeśli można wykonać legalny ruch skoczka pomiędzy tymi polami. Czy ten graf jest planarny?



Zadanie 13 (4 pkt). Dla $n \in \mathbb{N}_2$, niech G_n będzie grafem na zbiorze wierzchołków $[n] \times [n]$ takim, że (i, j) i (k, ℓ) są połączone krawędziami, gdy: $(|i - k| = 1 \text{ i } j = \ell)$ lub $(|j - \ell| = 1 \text{ i } i = k)$ lub $(i = \lfloor n/2 \rfloor, k = \lfloor n/2 \rfloor + 1 \text{ i } |j - \ell| = 1)$. Innymi słowy, jest to krata z dodanymi "krzyżykami" w środkowym rzędzie. Na rysunku poniżej mamy G_{10} . Czy istnieje $n \in \mathbb{N}_2$ takie, że K_{2025} jest minorem G_n ?



Powodzenia.