

Kolokwium I (Część 1)

Zadanie 1 (3 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że dowolny zbiór $n^2 + 1$ dodatnich liczb całkowitych zawiera podzbiór $n + 1$ liczb, gdzie dla każdych dwóch z nich jedna dzieli drugą lub $n + 1$ liczb, gdzie żadna nie dzieli innej.

Zadanie 2 (3 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}$. Ile jest ciągów binarnych $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ takich, że $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \geq \varepsilon_4 \leq \dots$?

Zadanie 3. (i) (2 pkt) Wyznacz wzór zwarty na wyrazy ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowanego w następujący sposób. Niech $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 2^{n+3} + 3^n.$$

(ii) (2 pkt) Wyznacz wzór zwarty na funkcję tworzącą ciągu $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowanego w następujący sposób. Niech $b_0 = 1$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n 5^k \cdot b_{n-k}.$$

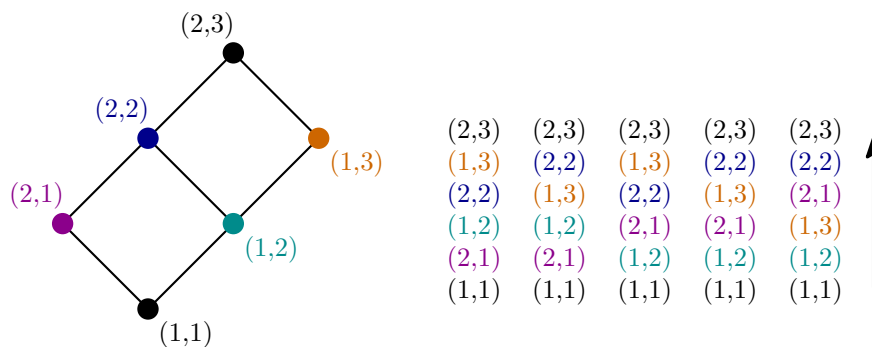
Zadanie 4 (3 pkt). Niech $n, m, k \in \mathbb{N}$ i niech $A \subseteq [n-1]$ taki, że $|A| = k$. Ile jest funkcji $f: [n] \rightarrow [m]$ takich, że dla każdego $i \in [n-1]$ mamy $f(i) \leq f(i+1)$ i dla każdego $i \in A$ mamy $f(i) + 2026 \leq f(i+1)$?

Zadanie 5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź i udowodnij zwartą postać następujących wyrażeń:

(i) (1 pkt) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n^k$,

(ii) (2 pkt) $\sum_{k=0}^{2026} \binom{2026}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ 100 \end{matrix} \right\}$.

Zadanie 6 (4 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Na zbiorze $[2] \times [n]$ definiujemy poset P_n . Dla wszystkich $(a, b), (c, d) \in [2] \times [n]$ mamy $(a, b) \leq (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq c$ i $b \leq d$. Ile poset P_n ma różnych liniowych rozszerzeń? Zobacz przykład posetu P_3 i jego wszystkich pięciu rozszerzeń liniowych na rysunku poniżej.



Powodzenia.