

Kolokwium I (Część 2)

Zadanie 1 (3 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Ile jest ścieżek Motzkina bez sekwencji $1, -1$ (bez szczytów) takich, że łączna liczba wystąpień 0 i 1 jest równa n ? Dla $n = 3$ mamy 5 takich ścieżek, których wizualizację można zobaczyć na rysunku na odwrocie.

Zadanie 2 (3 pkt). Znajdź wzór zwarty na funkcję tworzącą ciągu zdefiniowanego dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jako

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k+1} F_k \right) - 1.$$

Wynioskuj zwarty wzór na a_n .

Zadanie 3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $k \in [n]$. Przez $2^{[n]}$ rozumiemy zbiór wszystkich podzbiorów $[n]$. Definiujemy:

$$\begin{aligned} b_k &= |\{(S_1, \dots, S_k) \in (2^{[n]})^k \mid S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k\}|, \\ c_k &= |\{(S_1, \dots, S_k) \in (2^{[n]})^k \mid \text{dla każdego } i, j \in [k], \text{ jeśli } i \neq j \text{ to } S_i \cap S_j = \emptyset\}|, \\ d_k &= |\{(S_1, \dots, S_k) \in (2^{[n]})^k \mid S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k = \emptyset\}|. \end{aligned}$$

- (i) (1 pkt) Udowodnij, że $b_k = c_k$.
- (ii) (1 pkt) Oblicz b_k .
- (iii) (1 pkt) Oblicz d_k .

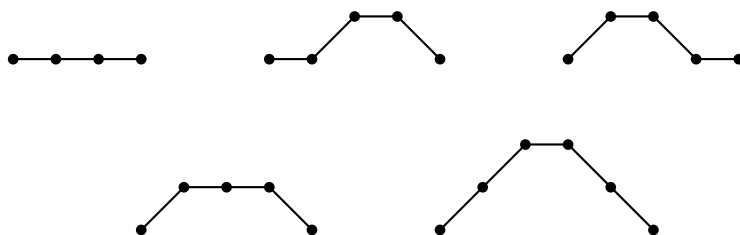
Zadanie 4. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Udowodnij, że

- (i) (2 pkt) $p(n \mid \text{nie występują dwie sąsiednie liczby jako składniki i składniki są większe niż } 1)$
 $= p(n \mid \text{żaden składnik nie występuje dokładnie raz}),$
- (ii) (2 pkt) $p(n \mid \text{składniki podzielne przez } 8 \text{ występują zero razy lub raz})$
 $= p(n \mid \text{każdy składnik występuje co najwyżej } 15 \text{ razy}).$

Zadanie 5 (4 pkt). Marsjańskie ciągi DNA składają się z pięciu różnych zasad azotowych: A, C, T i G (jak na Ziemi), oraz specjalnej dodatkowej zasady M (marsynina). Z najnowszych badań wynika, że zasady mogą formować dowolne ciągi poza sekwencjami TG, TM, MG i MM. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech m_n będzie liczbą różnych dopuszczalnych sekwencji marsjańskiego DNA długości n . Na przykład, $m_0 = 1$, $m_1 = 5$ i $m_2 = 25 - 4 = 21$. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(m_n)_{n=0}^\infty$.

Pytanie bonusowe: (warte jeden dodatkowy punkt niewliczany do maksimum) Podaj jak najprostszy możliwy wzór na m_n korzystający ze znanych wartości. Podając wartość, można użyć co najwyżej pięciu znaków.

Zadanie 6 (3 pkt). Niech $n, k \in \mathbb{N}_1$ i niech $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ będzie rodziną takich zbiorów, że dla wszystkich parami różnych $A, B, C \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \not\subseteq C$. Udowodnij, że $|\mathcal{F}| \leq 1 + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$.



Powodzenia.