

Kolokwium II (Część 1)

Zadanie 1 (3 pkt). Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \equiv 1 \pmod{4}$. Wyznacz wartość sumy

$$\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{a}{p} \right).$$

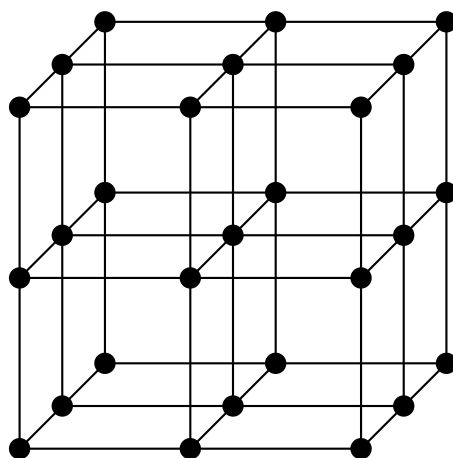
Zadanie 2 (3 pkt). Dla $n \in \mathbb{N}$, n -wierzchołkowy *turniej* to zorientowany graf K_n . Turniej jest *acykliczny*, jeśli nie zawiera cyklu skierowanego. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że każdy N -wierzchołkowy turniej, którego krawędzie pokolorowane są dwoma kolorami (niebieskim i czerwonym) zawiera acykliczny n -wierzchołkowy turniej mający wszystkie krawędzie tego samego koloru.

Zadanie 3 (3 pkt). Mówimy, że kolorowanie φ wierzchołków grafu G jest *właściwe*, jeśli dla wszystkich $uv \in E(G)$ mamy $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Mówimy, że kolorowanie φ wierzchołków grafu G jest *dobre*, jeśli jest właściwe i dodatkowo, dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ istnieje kolor występujący dokładnie raz w jego sąsiedztwie, innymi słowy istnieje $u \in N_G(v)$ taki, że dla każdego $w \in N_G(v) \setminus \{u\}$ mamy $\varphi(u) \neq \varphi(w)$. Udowodnij, że każdy graf bez wierzchołków izolowanych ma dobre kolorowanie używające co najwyżej $2\Delta(G) + 1$ kolorów.

Zadanie 4 (3 pkt). Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, *trójwymiarową kratą rzędu n* nazywamy graf H_n na zbiorze wierzchołków $[n]^3$ taki, że (i, j, k) i (i', j', k') sąsiadują, jeśli mają dokładnie dwie współrzędne identyczne, a pozostała współrzędna różni się o 1. Graf H_3 przedstawiamy na rysunku na odwrocie. Czy istnieje $n \in \mathbb{N}_1$ takie, że K_{2026} jest minorem H_n ?

Zadanie 5 (4 pkt). Niech $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że graf jest *k -planarny*, jeśli da się go narysować na płaszczyźnie tak, aby każda krawędź przecinała co najwyżej k innych krawędzi. (Pamiętaj, że krawędzie na rysunku są reprezentowane przez krzywe bez końców.) Mówimy, że graf jest *średnio- k -planarny*, jeśli da się go narysować na płaszczyźnie tak, że istnieje funkcja f przypisująca każdemu przecięciu dwóch krawędzi jedną z tych krawędzi taką, że każda krawędź została przypisana co najwyżej k razy. Udowodnij, że każdy graf $2k$ -planarny jest średnio- k -planarny.

Zadanie 6 (4 pkt). Niech G będzie grafem, i niech T , S_1 , S_2 i S_3 będą podzbiorami $V(G)$ takimi, że S_1 , S_2 i S_3 są parami rozłączne oraz $G[S_i]$ jest spójnym grafem dla każdego $i \in [3]$. Niech P_1 , P_2 i P_3 będą parami rozłączne ścieżkami w G takimi, że P_i jest S_i - T ścieżką dla każdego $i \in [3]$. Niech r_1 , r_2 i r_3 będą wierzchołkami G takimi, że $r_i \in S_i$ dla każdego $i \in [3]$. Udowodnij, że istnieją dwie rozłączne $\{r_1, r_2, r_3\}$ - T ścieżki w G .



Powodzenia.