

Kolokwium II (Część 2)

Zadanie 1. Graf jest *zewnątrznie planarny*, jeżeli ma zanurzenie planarne, w którym wszystkie wierzchołki są zawarte w ścianie zewnętrznej.

- (i) (1 pkt) Udowodnij, że każdy graf zewnętrze planarny na $n \in \mathbb{N}_2$ wierzchołkach ma co najwyżej $2n - 3$ krawędzie.
- (ii) (2 pkt) Udowodnij, że każdy graf zewnętrze planarny można pokolorować właściwie trzema kolorami. (Nie wolno korzystać z twierdzenia o czterech kolorach.)

Zadanie 2. Dla grafu G , $\nu(G)$ oznacza rozmiar największego skojarzenia w G , $vc(G)$ oznacza rozmiar najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G , $\omega(G)$ jest liczbą klikową G , $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną G i $\overline{G}$ jest dopełnieniem G .

- (i) (1,5 pkt) Dla każdego grafu dwudzielnego G wyprowadź zależność między $\nu(G)$ i $\chi(\overline{G})$.
- (ii) (1,5 pkt) Dla każdego grafu dwudzielnego G wyprowadź zależność między $vc(G)$ i $\omega(\overline{G})$.
- (iii) (0,5 pkt) Skorzystaj z powyższych, aby udowodnić, że klasa dopełnień grafów dwudzielnych jest doskonała.

Zadanie 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, niech $\tau(n)$ będzie liczbą dzielników n . Niech τ^{-1} będzie odwrotnością τ względem splotu Dirichleta.

- (i) (1,5 pkt) Wyznacz zwarty wzór na τ^{-1} .
- (ii) (1,5 pkt) Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ wyznacz zwarty wzór na $\tau^{-1}(n)$.

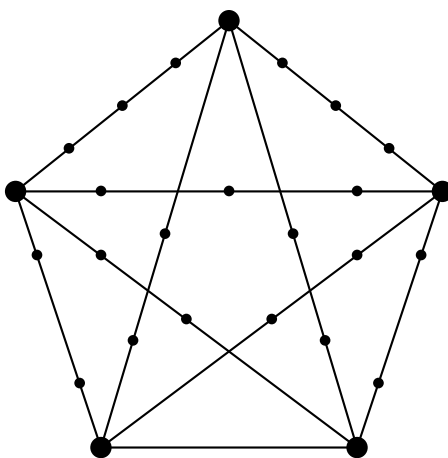
Zadanie 4 (3 pkt). Niech G będzie grafem na $n \in \mathbb{N}_3$ wierzchołkach takim, że dla dowolnych niesąsiednich $u, v \in V(G)$ zachodzi $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n + 1$. Udowodnij, że dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ istnieje cykl Hamiltona zawierający e .

Zadanie 5 (3 pkt). *Przekrój* grafu G to para (S, T) , gdzie $S, T \subseteq V(G)$, $S \cap T = \emptyset$ i $S \cup T = V(G)$. Dla przekroju (S, T) grafu G , przez $E(S, T)$ oznaczamy zbiór krawędzi G z jednym końcem w S i drugim w T . Dla pary wierzchołków $x, y \in V(G)$, przekrój (X, Y) jest *minimalnym (x, y) -przekrojem* w G jeśli $x \in X$, $y \in Y$ i (X, Y) minimalizuje wartość $|E(X, Y)|$ spośród wszystkich takich przekrojów. Niech G będzie grafem i niech $s, t \in V(G)$. Ustalmy minimalny (s, t) -przekrój (S, T) . Udowodnij, że dla każdego $x, y \in S$ istnieje minimalny (x, y) -przekrój (X, Y) taki, że $X \subseteq S$ lub $Y \subseteq S$.

Zadanie 6. Dla podzbioru liczb naturalnych I , I -*podpodział* grafu H to każdy graf uzyskany z H poprzez podmianę każdej krawędzi na ścieżkę o długości będącej pewną liczbą z I . Dodane ścieżki nazywamy *ścieżkami podpodziału*. Na rysunku na odwrocie przedstawiamy $\{1, 3, 4\}$ -podpodział grafu K_5 .

- (i) (1 pkt) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego grafu G , jeśli G ma $[100]$ -podpodział K_N jako podgraf, to G ma $\{a\}$ -podpodział K_n jako podgraf dla pewnego $a \in [100]$.

- (ii) (0,5 pkt) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego grafu G , jeśli G ma $[100]$ -podpodział K_N jako podgraf, to G ma $\{a\}$ -podpodział K_n jako podgraf dla pewnego $a \in [100]$ taki, że każda ścieżka podpodziału jest indukowana w G .
- (iii) (3 pkt) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego grafu G , jeśli G ma $[100]$ -podpodział K_N jako podgraf, to G ma $\{a\}$ -podpodział K_n jako podgraf indukowany dla pewnego $a \in [100]$ lub G ma $K_{100,100}$ jako podgraf.



Powodzenia.